INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM

Libri Quatuor.

In quibus,

REGVLIS ET EXEMPLIS PRActicis breuiſſimè & clariſſimè explicantur

Quatuor numerorum genera.

I. Rationales abſoluti.
II. Rationales coſſici.
III. Irrationales abſoluti.
IV. Irrationales coſſici.

CVM APPENDICE FRACTIONUM Aſtronomicarum

ET INDICE CAPITVM, ARTICVLORVM & rerum præcipuarum.

à

R.P. IOANNE LANTZ,
è Societate Ieſu, conſcripti.

In gratiam Studioſæ Iuuentutis.

COLONIÆ AGRIPPINÆ
apud IOANNEM KINCKIUM, ad interſigne Monocerotis.
M. DC. XXX.
Permiſſu Superior. & priuilegi.

Digitized by Google

AVCTORITAS R. P. PROVINCIALIS.

ARITHMETICAM Practicam Ioannis Lantz è Societate noſtra, à deſtinatis noſtræ Societatis Patribus harum rerum peritis, lectam & probatam; Ego Melchior Hartelius Societatis Ieſu per ſuperiorem Germaniam Præpoſitus Prouincialis, facta mihi poteſtate ab Admodum R. P. N. Mutio Vitelleſco eiuſdem Societatis Præpoſito Generali, in lucem edi permitto. Cui rei teſtandæ manu mea ſubſcripſi, & Sigillum Societatis conſuetum appreſſi, Landſpergæ 3. Octobris, Anno ſalutis. M.DC.XVI.

Melchior Hartelius.

NOBILISSIMO ET AMPLISSIMO
viro ac Domino,

DOM. IOANNI GEORGIO Hervvart ab Hohenburg, I. V. D.

Sereniſsimo Poiorum Duci ab intimis Conſilij, Præſidi Prouinciæ Schvvabæ, & inclitorum vtriuſque Bauariæ Ordinum Cancellario, &c.

NOn diu de Patrono, cui hanc meam de numerandi ratione, lucubratiunculã ſua auctoritate tuendã offerrem, cogitandum fuit. Nam cui potius Arithmeticã dicarem, quam principi Arithmeticorum, & in omni alia literatura verſatiſsimo? Sunt & aliæ prope mille cauſæ, quæ mihi hoc conſilium dictarunt, vt nomini M. V. laborem hunc meum inſcriberem: quarum poſtrema non eſt, quod hæc ipſa Arithmetica conſilio, auſpiciis, & liberalitate M. D. V. in lucem prodit. Quæ vtinam ita numeris ſuis abſoluta prodiret, vt tanti viri patrocinio digna videri poſſet. Etenim quo is, cui dona offeruntur in altiore cũ honoris, tum ſcientiæ gradu eſt conſtitutus, tanto qui dicantur libri par eſt eſſe excellentiores. Quod cum animo agitarem, viderem que magnum inter hãc Arithmeticam, & patroni doctrinam inter eſſe interuallum, vix auſus fui, illam ad aram eius ſuſpendere. Verum, cum mihi M. D. V. erga omnes, cuiuſcunque ſint literaturæ ſingularis quædam propenſio ignota non eſſet, animum reſumpſi, & nemini, niſi M. V. eam conſecrandam exiſtimaui. Quamobrẽ maiorem in modum peto, vt eo animo in ſuũ illã patrocinium ſuſcipiat, quo offertur. Quod ſi, vti non dubito, fecerit, multis me mominibus iam ante ſibi obnoxium, pluribus adhuc obſtringet, Ingolſtadii 4. die octob. Anno ſalutis reparatæ 1616.

M. D. V. D.

Ioannes Lantz

AD CANDIDVM LECTOREM.

HOs quatuor Arithmeticorum libros, candide lector, non eo conſilio ſcripſi, quod opiner facilius ex illis, quam ex aliorum laboribus numerandi artem hauriri. Non ita mea amo; non ita inſanio. Quin omnium conatus laudandos cenſeo: quanquam, vt hominum ingenia alia aliis perſpicaciora ſunt, non neſciam, aliuni alio, ſi vniuerſam artem ſpectes, felicius, & explicatius animi ſenſa promere: ſi ad particularia deſcendas; in ſingulis ſeorſim reperiri, in quo iure ſuo gloriari, & aliis præferri poſſint. Quæ cum ita eſſe viderem, conatus ſum ex variis Arithmeticis præcipua, quæ ad numeros ſpectant, ſecluſis ſecretioribus quibuſdam, olim à Diophanto, auorum memoriâ à Cardano & Stiphelio, noſtrâ à Franciſco Vieta, Ioanne Faulhabero, & aliis propoſita, nec dum tamen quod ſciam, ſatis clare pro vulgi captu explicata, colligere, talique methodo diſcentibus proponere, vt abſque magiſtro ex libello, ſi molem ſpectes, exiguo; ſi quæ continet, bene magno, Arithmetici eſſe poſſent. Quanquam non ſine ſudoribus, quando τῆς ἀρετῆς, vt habet Hoſio. ἱδρῶτα θεοὶ προπάροιθεν ἔθηκαν ἀθάνατοι Cæterum ne præpoſterè rem aggrediatur Lector, & voti tardius, quam vellet, compos fiat, omnino librum primum, elementa inquam tam integrorum, quam fractorum numerorum: regulam item proportionum, & radicum extractiones apprimè diſcat, penituſque combibat ante, quàm ad tres poſteriores gradum faciat neceſſe eſt. Quod ſi fecerit, facile poſteriores, dum aliquẽ laborẽ impendat, ſcientia comprehendet. Si neglexerit, fruſtra erit omnis labor, niſi ingenij bonitas, aut labor improbus, quæ vel adamãtina vincunt, ſuppetiatum eant. Vale Lector, & noſtris hiſce laboribus ue, & fruere.

NB.

N B. Beneuole lector, proportiones ſuperpartientes, quæ ſunt inter 7. *&* 5. *inter* 14. *&* 10. *inter* 27. *&* 17. *inter* 81. *&* 51. *Item multiplices ſuperpartientes quæ ſunt inter* 34. *&* 7. *inter* 14. *&* 5. *non vt lib.*1.*c.*4.*a.*2.*pag.*56. *per incuriam factum eſt pronunciari; ſed prima & ſecunda dicuntur ſuperbipartientes quintas; tertia & quarta, ſuperdecupartientes decimas ſeptimas; quinta; quadrupla ſuperſextupartiens ſeptimas. Sexta, dupla ſuperquadrupartiens quintas; ſemper enim exceſſus maioris ſuper minorem voci ſuperpartiens inſeritur, & minor proportionis terminus ſolitariè ponitur. Vt quia* 7. *excedit* 5. *binario, dicitur proportio* 7. *ad* 5. *ſuperbipartiens quintas. Cur verò, quæ eſt inter* 14. *&* 10. *vocetur ſuperbipartiens quintas, non verò ſuperquadrupartiens decimas, quæ eſt inter* 81. *&* 51. *vocetur ſuperdecupartiens decimas ſeptimas, ratio eſt: quia nec* 14. *&* 10. *nec* 81. *&* 51. *ſunt numeri inter ſe primi, ſed compoſiti, habentque communem menſuram, illi quidem hanc* 2. *hi verò hanc* 3. *fit vt ſi per menſuras illas diuidantur, reducantur ad has,* 7. 5. *& has* 27. 17. *vnde priores dicuntur habere proportionem ſuperpartientem quintas, poſteriores ſuperdecupartientem decimas ſeptimas.*

Proportio *quoque hæc* $5\frac{3}{8}$ *quæ habetur art.* 3. *pag.* 57. *dicitur quintupla ſupertripartiens octauas; quæ* $3.\frac{3}{7}$ *tripla ſuperpartiens ſeptimas; hæc* $7.\frac{5}{7}$ *ſeptupla ſuperquintupartiens ſeptimas; hæc* $4\frac{3}{4}$ *quadrupla ſupertripartiens quartas. Idem iudicium eſto de alijs, ſi qua occurrant.*

INDEX CAPITVM ET ARTICVLORVM.

LIBER I.

Cap. I. pag. I.

Art. I.	De Numeratione	pag. 2	integrorum.
Art. II.	De Additione	pag. 4	
Art. III.	De Subtractione	pag. 7	
Art. IV.	De Multiplicatione	pag. 9	
Art. V.	De Diuiſione	pag. 13	

Caput II.

Art. I	De Reductione ad minores terminos.	pag. 21	numerorum fractorum.
Art. II.	De Reductione ad eandem denominationem.	pag. 23	
Art. III.	De Additione & Subtractione	pag. 25	
Art. IV.	De Multiplicatione & diuiſione	pag. 27	
Art. V	De fractis fractorum.	pag. 28	

Caput III.

Art. I.	De Regula proportionum	pag. 29
	De directa ſimplici	pag. 30
	De reciproca ſimplici	pag. 37
	De compoſita directa	pag. 38
	De reciproca compoſita	pag. 40
Art. II.	De Regula conſortii	pag. 41
Art. III.	De regula obligationis	pag. 44
Art. IV.	De regula poſitionum	pag. 48

Caput IIII.

Art. I.	De numero ab ſolarè conſiderato	pag. 53
Art. II.	De numero relato, & proportionibus	pag. 55
Art. III.	De proportionum compoſitione	pag. 57
Art. IV.	De Analogia ſiue Proportionalitate	pag. 58
	De Progreſſione Arithmetica	ibid.
	Regulæ Progreſſionis Arithmethicæ	pag. 59
	Proprietates progreſsionis Arithmethicæ	pag. 60
	De progreſsione Geometrica	pag. 61

proprie-

Proprietates progreſsionis Geometricæ pag. 62
De progreſſione muſica pag. 63
Art. V. De numero figuras geometricas repræſentante pag. 65
De numeris planis pag. 66
De numero ſolido pag. 70

Caput V.

De radicum extractionibus pag. 72
De tabula radicum, & graduum pag. 73
Art. I. Coaſtruct o tabulæ pro extrahendis radicibus pag. 75
Art. II. De extrahendis omnis generis Radicibus pag. 77
De Extractione Radicis quadratæ pag. 78
De vulgari extractione Radicis quadratæ pag. 80
De extractione radicis cubicæ pag. 81
De extractione ſuperſolidi primi pag. 83
De extractione radicum ex numeris fractis pag. 85
Demonſtratio extractionis Radicum pag. 86

Liber III. Pag. 87.

De numero rationali coſsico. pag. ead.

Caput I.

De elementis numerorum coſsicorum pag. 88
Art. I. De ſimplicium coſsicorum Additione, & ſubtractione pag. 89
Art. II. De multiplicatione & Diuiſione ſimplicium coſsicorum pag. ead.
Art. III. De Additione & Subtractione Compoſitorum, & Diminutorum. pag. 91
Art. IV. De Multiplicatione, & Diuiſione Compoſit. & Diminutione pag. 92
Art. V. De Radicum extractione pag. 95
Art. VI. De elementis ſecundarum radicum pag. 98

Caput II.

De Regula Algebræ & eius explicatione pag. 99
Art. I. De æquationis inuentione pag. 100
Art. II. De Reductione æquationis pag. 102
Art. III. De Diuiſione & Radicis extractione pag. 103

Caput III.

De praxi numerorum coſsicorum pag. 105
Art. I. Exempla in quibus aut diuiſor eſt vnitas, aut nulla Reductione opus eſt pag. 106

Art.II. Exemp'a,quæ ſola Diuiſio ſoluit pag.110
Art.III. Exempla,quæ extractio Radicis ſoluit. pag.117
Art.IV. Exemp'a ſecundarum radicum pag.123
Art.V. Exemp'a Geometrica pag.129
Art.VI. Exempla contractè propoſita,& abſtractè ſoluta. pag.133

LIBER TERTIVS.

Quid ſit numerus irrationalis abſolutus pag.173
Quot ſint ſpecies numerorum irrationalium abſolutorum. pag.137

Caput I.

Art.I. De Additione, & ſubtractione irrationalium ſimplicium pag.139
Art.II. De Multiplicatione, & Diuiſione irrationalium ſimplicium pag.142
Art.III. De Additione, & Subtractione Compoſitorum, & Diminutorum pag.144
Art.IV. De Multiplicatione,&Diuiſione compoſitorum&Diminutorum pag.146
Art.V. De vniuerſallum calculo pag.148
Art.VI. De binomiis,& reſiduis pag.150
Art.VII. De radicum extractione ex binomiis, & reſiduis pag.151

Caput II.

Propoſitiones numerorum irrationalium abſolutorum pag.152

LIBER QVARTVS

De numeris irrationalibus Coſsicis,
Caput I. De calculo irrationalium coſsicorum pag.158
Caput II. De vſu,& praxi irrationalium coſsicorum pag.159

APPENDICES

I. De Ca'culo Aſtronomico. pag.166
II. De Vulgaribus Diuinationibus. pag.175

INSTI-

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM LIBER PRIMVS.

DE NVMERIS RATIONALIBVS abſolutis

NVMERVS rationalis abſolutus, eſt numerus vulgaris omni carens denominatione. De quo hæc pertracto. *Primò* ago de Elementis numerorum integrorum. *Secundò* de elementis fractorum. *Tertiò* de regulis, & praxi. *Quartò* de numerorum proprietatibus. *Quintò* de radicum extractionibus.

Capvt I.

DE INTEGRORVM NVMERORVM elementis.

Elementa Arithmetica, ſunt quatuor vulgatæ ſpecies, *Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio*, quibus quidam numerationem addunt. Nos de omnibus quinque, initium à numeratione facientes, breuiter agemus.

Articvlvs I.

DE NVMERATIONE.

Numeratio eſt enunciatio, & expreſsio valoris cuiuſcunque numeri propoſiti. Supponimus autem hos decem characteres 1.2.3.4.5.6.7.8.9.0. ad hanc Arithmeticam accedentibus, notos eſſe. Porrò, vt quemcun-

que numerum propoſitum methodicè pronunciemus, hæc ſunt animaduertenda.

Primò, circularem hanc figuram o, quam cyphram appellamus, per ſe quidem nihil valere; ſed additam reliquis, eas per denariam denominationem augere: ita 20, valent viginti, cum 2, duo tantum valeant. 200, valent ducēta. 2000, duo millia. 20000, viginti millia. 200000, ducenta millia &c.

Secundò, quemlibet numerum verſus dextram primo loco poſitum, ſeipſum ſignificare ſemel; ſecundo decies; tertio centies; quarto millies; quinto decies millies; ſexto centies millies; ſeptimo, millies millies; octauo decies millies millies, &c.

Tertiò, vt faciliùs numerus propoſitus enuncietur, poni ſub quarto verſus ſiniſtram, punctum, &, duobus prætermiſsis, ſub ſeptimo; rurſuſq; duobus prætermiſſis, ſub decimo; itemque duobus prætermiſſis, ſub decimo tertio, &c.

Quartò; quot ſunt puncta, toties dicendum eſſe millies; ſed ſub penultimo puncto verſus dextram, pro millies, dicendum millena, ſub vltimo millia.

Quintò, tot eſſe membra, quot ſunt puncta, & numerum habentem punctum ſemel; ſecundum à puncto verſus ſiniſtram decies; tertium centies, ſeipſum ſignificare.

Vltimò, cyphrarum, ſeu circulorum, nullam penitus habendam rationem, niſi quantum ad augmentum.

His ita animaduerſis hæc exempla ſic pronunciabimus.

4634276598542754
4200312067600 0760
849089000080787900
1000000000000000000

Primum. Quater millies, millies, millies millena millia; ſexcenties tricies quater millies, millies millena millia: ducenties ſeptuagies ſexies millies millena millia: quingenties nonagies octies millena millia: quingẽta quadraginta duo millia; ſeptingenta, quinquaginta quatuor.

Secundum. Quadragies bis millies, millies, millies millena millia: ter millies, millies millena millia: centies vicies millies millena millia: ſexcenties ſeptuagies ſexies millena millia: ſeptingenta ſexaginta.

Tertium. Octingenties quadragies nouies millies, millies, millies millena millia: octogies nouies millies, millies millena millia: octogies millena millia: ſeptingenta octoginta ſeptem millia, nongenta.

Poſtremum. Millies, millies, millies, millies millena millia.

ANNOTATIO.

Poteſt pronuntiatio etiam fieri per milliones, more Italorum (ſignificat millio millies millena) Noto autem puncta millionum ſupra figuras hac nota o; ac prima quidem ponitur ſupra ſeptimam figuram; ſecunda, quinque prætermiſsis, ſupra decimam tertiam, hoc modo 67312507064340 *qui numerus ſic pronunciatur. Sexaginta ſeptem milliones, millionum: trecenti duodecim milleni milliones: quingenti ſeptem milliones: ſexaginta quatuor millia, trecenta quadraginta.*

Poſſunt quoque puncta ſub centenarijs, & denarijs poni hoc modo, 4000000000, qui numerus ſic pronunciatur. Quater millies centies centena millia. Aut hoc modo 4000 0000000. & ſic effertur: Quater millies centies decies millena decies. Quæ pronuntiationes faciles ſunt, ſi diligenter ad puncta attendatur, vt ex ſequentis exempli variatione apparet.

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *decies millies millena millia.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *centies centena millena millies*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *millies centies centena millia.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *millies centies millena centies.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *decies centies millena millia dec.*

Poteſt idem exemplum adhuc pluribus modis pronunciari, vt quilibet videt. Duriuſcula videntur quædam dictarum pronuntiationum, non inficior; ſed artem, non verba conſidera.

Articvlvs II.

DE ADDITIONE.

Additio eſt duorum aut plurium numerorum in vnam ſummam collectio. Quæ collectio, vt accuratior ſit, hæc obſeruentur.

Primò, numeri ſibi mutuo perpendiculariter ſupponantur, primus verſus dextram ſub primo, ſecundus ſub ſecundo, tertius ſub tertio &c. & defectus ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquatur, vt in ſecundo, & tertio exemplis, factum vides.

Secundo, in operando procede à dextra verſus ſiniſtram

ſtram,colligens in vnam ſummam omnes numeros primo loco verſus dextram poſitos,Quæ ſumma ſi vna figura ſcribi poſsit,ſcribatur infra lineam directè ſub numer s primo loco poſitis; ſi vna figura ſumma illa ſcribi non poſsit,ſcribatur minor,hoc eſt, quæ verſus dextram eſt, infra lineam; maior,quæ verſus ſiniſtram eſt, retineatur pro ſequente operatione.

Tertiò,cyphrę hic,vt & in reliquis ſpeciebus,nihil penitus curandæ ſunt.His obſeruatis ſequentia exempla facilè addemus.

Primum exemplum; Sint in vnam ſummam colligendi hi numeri, 4253,3425. collocatione vt dictum eſt facta. Dico primo 3.& 5.faciunt 8;quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo 5.& 2.faciunt 7;quibus quoq; infra lineam poſitis,Dico tertio 2.& 4. faciunt 6; & his infra lineam poſitis, Dico vlt.4.& 3.faciunt 7.Numeri ergo 4253.& 3425. in vnam ſummam collecti, faciunt 7678.

4253
3425
7676

Secundum exemplum.Sint addendi hi tres numeri. 8765. 5794. 980, Collocatione facta, Dico primo 5.& 4.(nam cyphra non curatur) faciunt 9;quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo 6.9,& 8.faciunt 23; pono figuram dextram,hoc eſt, 3. infra lineam,retineo 2; & dico 7.7.9.& 2.prius retenta, faciunt 25. pono 5. infra lineam,directè ſub 9,retineo 2.& dico vlt.8.5.& 2, retenta faciunt 15.pono totũ infra lineã,nimirũ 5. ſub 5; 1. paulo remotius verſus ſiniſtrã. Si ergo 8765.5794.& 980. in vnam ſummam colligantur,fient 15539.

8765
5794
980
15539

Tertium exemplum. Sint hi numeri 7500402. 980091. 75215.5301. 900. addendi. Collocatione facta, vt de-

fectus ex parte ſiniſtra relinquatur. Dico primo 2. 1. 5. & 1. faciunt 9; quibus infra lineam poſitis Dico ſecundo 9, & 1. faciunt 10; pono 0. infra lineam, retineo 1. Dico tertio 4. 2. 3. 9. & prius retentum faciunt 19; pono 9 infra lineam, retineo 1. Dico quarto 5. 5. & prius retentum, faciunt 11. pono 1. infra lineam, retineo 1. Dico quinto 8. 7. & retentum faciunt 16; pono 6 infra lineam, retineo 1. Dico ſexto 5. 9. & retentum, faciunt 15; pono 5. infra lineam, retineo 1. dico vltimo 7. & retentum faciunt 8. Ergo ſumma dictorum numerorum eſt 8561909.

7500402
980091
75215
5301
900
8561909

Examen.

Abijce 9. quoties potes, tam ex numeris addendis, quàm ex addito, hoc eſt, tam ex ſupra, quam ex infra lineam poſitis, nulla habita ordinis, aut loci ratione; ſi enim reſidua æqualia fuerint, probabile eſt operationē bene habere. Ita vides in primo exemplo poſt abiectionem 9. reſtare 1. & 1; in ſecundo 5. & 5; in tertio 2. & 2. Si reſidua fuerint inæqualia, certum eſt erratum eſſe: quare operatio iteranda erit. Dixi ſi reſidua æqualia fuerint, probabile eſſe operationem bene habere, nam certum non eſt; ſiquidem in appoſito exemplo, reſidua ſunt æqualia, at in operatione plurimum erratum eſt.

358
234
815

Articvlvs III.

De Svbtractione.

Sub-

Subtractio eſt ſubductio minoris numeri ex maiore, aut æqualis ex æquali. Et vt melius, quomodo numerus ex numero ſubducatur, intelligas, hæc obſerua.

Primo minor numerus, hoc eſt ſubducendus, ſupponendus eſt maiori, ſiue illi ex quo fit ſubductio; & defectus, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquendus.

Secundo, ſi figura inferior maior fuerit ſuperiore, intellige ad ſuperiorem aſſumpta eſſe 10. quæ vt compenſes, appone ſequenti figuræ punctum, quod in ſequente operatione pro vnitate numerandum eſſe memineris.

Tertio, etiam hic cyphræ non ſunt curandæ.

His obſeruatis ad exempla accedimus. *Primum*, volo 253 ex 485 ſubtrahere. Collocatis numeris more conſueto, Dico primo 3 ex 5, reſtant 2; quibus infra lineam directè ſub 3 poſitis, Dico ſecundo 5 ex 8, reſtant 3; quibus quoque infra lineam poſitis, dico vltimo 2 ex 4 reſtant 2 quæ pono infra lineam. Igitur ſubtractis 253 ex 485. reſtant 232.

485
253
232

Secundum exemplum. ſint 4297, ex 7345 ſubtrahenda. Collocatis numeris, vt cernis, Dico primo 7 ex 5, quod cum fieri non poſſit, pono ſub proximè inferiore, nempe ſub 9 punctum, & intelligo ad 5 aſſumpta eſſe 10. Quo facto dico 7. ex 15, reſtant 8; quibus infra lineam poſitis, dico ſecundo 10 ex 4 (nam 9, & punctum., quod vnum valet, faciunt 10) dico inquam, 10 ex 4, quod cum fieri nequeat, pono ſub 2, punctum, & intelligo 10 ad 4 aſſumpta, vt fiant 14. Dico ergo 10 ex 14, reſtant 4, quibus infra lineam poſitis, Dico tertio 3 ex 3, reſtat 0, ſiue nihil; pono ergo 0 infra lineam; Dico poſtremo 4 ex 7,

7345
4297
3048

A 4 reſtant

reſtant 3. Si ergo 4297. ex 7345. ſubtrahantur , reſtant 3048.

Tertium exemplum. Sint 70099 ex 801200 ſubtrahẽda. Collocatis numeris more ſolito, Dico *primo* 9 ex 0 accipere non poſſum; pono ergo ſub ſequente, nempe ſub 9, punctum, & intelligo 10 ad oprimum aſſumpta; dico ergo 9 ex 10, reſtat 1, quo infra lineam poſito,

801200	
.70099	$\frac{2}{2}$
731101	

Dico *ſecundo* 10 ex 0 accipere non poſſum; poſito igitur ſub ſequente 0 puncto, Dico 10 ex 10, reſtat 0; quo infra lineam poſito, Dico *tertio* 1 (punctum enim vnum valet) ex 2, reſtat 1. Dico *quarto* 0 ex 1, reſtat 1. Rurſus dico 7 ex 0, quod cum fieri non poſſit, pono punctum ſub 8, & dico 7 ex 10, reſtant 3; quibus infra lineam poſitis, dico vltimo 1 ex 8, reſtant 7. Si ergo 70099 ex 801200 ſubtrahantur, reſtant 731101.

Examen.

Abijce 9, quoties potes, tam ex ſupremo, hoc eſt, ex quo facta eſt ſubtractio; quam ex duobus inferioribus, hoc eſt, ex ſubtrahendo, & reſiduo: ſi namque facta illa abiectione reſidua æqualia fuerint, probabile eſt operationem bonam eſſe: ſi verò æqualia non fuerint, certum eſt erratum eſſe. Ita vides in primo exemplo, reſidua eſſe, 8 & 8; in ſecundo 1 & 1; in tertio 2 & 2. Dixi ſi reſidua æqualia fuerint, probabile eſſe operationem bonam eſſe: ſiquidem fieri poteſt, quamuis rarò, vt probatione bona exiſtente, operatio viciosa ſit, vt in adiecto exemplo patet.

4 2 7	
3 6 3	$\frac{4}{4}$
2 3 5	

Certiſsimum eſt operationem bonam eſſe, ſi duobus inferioribus inuicem additis, prodeat ſuperior. Poteſt itaque ſubtractio per Additionem; ſed & Additio per ſubtractionem probari; ſi omnes addendi ſigillatim ex ſumma ſubtrahantur, nihilque remaneat. Vt ſi in ſecundo Additionis exemplo 8765 ſubtrahantur ex 15539; ex reſiduo 5794; & rurſus ex reſiduo 980. nihilque remaneat, erit operatio bona.

Articvlvs IIII.

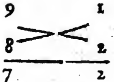
De Multiplicatione.

Multiplicatio eſt inuentio numeri, in quo alter multiplicantium toties continetur, quoties in altero vnitas, Vt ſi multiplicentur 8 per 4. producentur 32. in quo numero toties continentur 4; quoties in 8. vnitas, vel in 32. toties continentur 8. quoties in 4. vnitas. Sed antequam ad Multiplicationem veniamus, proponenda prius eſt menſa Phytagoræ, & regula, quã vocãt Pigri; quarum vtraq; tantum vſque ad 9. extenditur, etſi menſa Pythagoræ in infinitum extendi poſſit. Menſæ huius ſtructura facilis eſt.

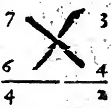
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Vſum eius accipe. Volens ſcire, quantum faciant octies 9; quæro 8 in capite, 9 in latere ſiniſtro tabulæ; vel contra 9 in capite; 8 in latere; vtrum enim fecero, offeret angulus communis 72. Item volens ſcire quantum faciant ſexies 7, quæro 6 in capite, 7 in latere; vel contra, vtrum enim fecero, offeret angulus communis 42.

Regula Pigri, ſic habet. Suppono ſibi mutuo numeros in ſe ducendos, illiſque verſus dextram tantum appono, vt fiant 10. Quo facto numeros appoſitos duco in ſe, productum, ſi vna figura ſcribi poſsit, pono infra lineam; ſi non poſsit, ſcribo infra lineam figuram dextram, retineo ſiniſtram : poſtremo numeros appoſitos per crucem ex prioribus numeris ſubtraho, reſiduum cum retento pono infra lineam, & habeo quæſitum. *Exemplum.* Volo ſcire quantum faciant octies 9: ſuppono ſibi mutuo 8 & 9; atque ad latus dextrum 9 pono 1; ad latus 8, 2, vt fiant 10, & dico ſemel 2 facit 2, quibus infra lineam poſitis, ſubtraho per crucem, vel 1 ex 8; vel 2 ex 9, vtrum enim fecero, reſtabunt 7, quibus infra lineam poſitis, video octies 9 facere 72.



Aliud exemplum. Volo ſcire quantum faciant ſexies 7; ſuppono ſibi mutuo 6 & 7, & dextrorſum illis appono 3 & 4, vt 10 fiant. Deinde dico ter 4 facit 12: poſitis igitur 2 infra lineam, retento 1, ſubtraho vel 3 ex 6; vel 4 ex 7, vtrum enim fecero, reſtant 3, quæ ſi cum prius retento ponam infra lineam, video ſexies 7 facere 42.



His expeditis nota *primò*, etſi integrum ſit, quemcunque multiplicantium in ſuperiore loco collocare, conueni-

ueniens tamen eſſe, vt maior ſuperiorem, minor occupet inferiorem.

Secundo, defectum, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquendum.

Tertio, ſi inferior plures figuras habuerit, omnes inferioris in omnes ſuperioris ſigillatim eſſe multiplicandas, & primas productorum figuras ſub proprijs inferioris multiplicantis figuris collocandas, & reliquas ordine ſiniſtrorſum.

Quarto, omnia producta in vnam ſummã colligẽda.

His notatis, exempla proponimus: *Primum*. ſint 4654 per 6 multiplicanda. Collocatis numeris, vt vides, Dico ſexies 4 faciũt 24: pono 4 infra lineam retineo 2. Dico rurſus ſexies 5 faciunt 30, quæ cum 2 retentis faciunt 32: poſitis igitur 2 infra lineam, & retentis 3, Dico tertio ſexies 6, faciunt 36. quæ cum 3 retentis faciunt 39; poſitis ergo 9 infra lineam & retentis 3, dico poſtremo ſexies 4 faciunt 24, quæ cum tribus retentis faciunt 27; pono totum infra lineam, quod in fine ſemper fit.



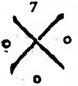
```
4654
   6
-----
27924
```

Secundum. Sint 92075 per 234 multiplicanda. Collocatis numeris, vt defectus ex parte ſiniſtra relinquatur, Dico primo, Quater 5, faciũt 20: pono 0 infra lineã directè ſub 4, retineo 2. Dico ſecũdo quater 7 faciũt 28, quæ cũ 2. retentis faciunt 30: pono 0 infra lineã retineo 3. dico tertio quater 0 eſt 0; pono infra lineã 3 retenta. Dico

```
   92075
     234
--------
  368300
 276225
184150
--------
21545550
```



Dico quarto quater 2. faciunt 8; pono 8 infra lineã. Dico poſtremo quater 9. faciunt 36. pono totum infra lineam, Pergo iam ad ſecundam figuram 3 quam multiplico in omnes figuras ſuperioris multiplicantis, hoc modo, Ter 5 faciunt 15: pono 5. infra lineam directè ſub 3; retineo 1. Dico ſecundo ter 7, faciunt 21; quæ, & prius retentum faciunt 2. pono 2 infra lineam, retineo 2. Dico tertio ter o eſt o; pono infra lineam 2 prius retenta. Dico quarto ter 2 faciunt 6. Dico vltimo ter 9 faciunt 27. Pergo denique ad tertiam figuram 2, & dico, bis 5 faciunt 10: pono o directè ſub 2, retineo 1. Dico ſecundo, bis 7. &c. His expeditis addo inuicem tres numeros duabus lineis incluſos, & conflo 21545550.

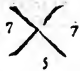



```
   23002
    5004
   92008
115010
115102008
```

Tertium exemplum. Sint multiplicanda 23002, per 5004. Collocatis numeris, vt cernis, Dico primo, quater 2. ſunt 8; quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo quater o eſt o: poſito igitur o infra lineam, Dico tertio quater o eſt o; quo infra lineam poſito, Dico quarto quater 3 faciunt 12: pono 2. infra lineam, retineo 1. Dico vltimo quater 2. faciunt 8, quæ cum prius retento pono infra lineam. Deinde omiſſis cyphris inferioris multiplicantis, pergo ad 5, & dico quinquies 2, faciunt 10. pono, o infra lineam directè ſub 5, retineo 1. Dico ſecundo quinquies o eſt o: pono infra lineam prius retentum, & dico quinquies o eſt o, poſitoq́; o infra lineam dico quinquies 3. faciunt 15, &c. Hoc facto numeros lineis incluſos addo, & conflo

11510

115102008. Nota ſi in principio vnius, vel v-triuſq; multiplicãtis ſint cyphræ, eas ſtatim infra lineam ponendas, & cum reliquis figuris agendum, vt eſt dictum.



6800
2300
2040000
136
15640000

Exempli cauſa, ſi ſint 6800 per 2300 multiplicanda, ponantur 4. cyphræ infra lineam; & cum reliquis figuri inſtituatur operatio more conſueto.

Examen.

Abijce ex vtroque multiplicante 9. quoties potes reſidua in inferiore, & ſuperiore crucis parte poſita, in ſe ducito: ex producto reijcito rurſus 9, quoties potes, reſiduo in alterutro crucis latere poſito: cui ſi reſiduum producti æquale fuerit probabile eſt operationem probam eſſe: ſi æquale non fuerit, certum eſt, erratum eſſe. Ita reiectis ex vtroque multiplicante 9, quoties fieri poteſt, reſidua ſunt in 1. exemplo, 1 & 6. in ſecundo 5 & 0. In tertio, 7 & 0. In quarto 5, & 5. His in ſe ductis, producuntur in primo exemplo, 6. In ſecundo, 0. In tertio, 0. In quarto 25. Ex his rurſus reiectis 9 (quanquam in tribus prioribus exemplis non ſit neceſſe) quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo 6. In ſecundo, 0. In tertio, 0. In quarto 7. His reſiduis, quia reſidua productorum çqualia ſunt, probabile eſt operationes probas eſſe; non tamen certum. Nam etiam hic poteſt, examine bono exiſtente, operatio vicioſa eſſe.

Articvlvs V.

De Divisione.

Diui-

Diuiſio eſt inuentio numeri in quo toties continetur vnitas, quoties Diuiſor in diuidendo. Vt ſi diuidantur 20 per 4. prouenient 5; in quo numero toties vnitas cōtinetur; quoties 4. in 20.

Vel diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties in diuidendo continetur, quoties vnitas in diuiſore. Quoties enim vnitas in 4 continetur, toties continentur 5 in 20. Vocatur numerus inuentus, tum quotiens, ſeu quotus, tum proueniens.

Cæterum, vt facilius quemuis numerum maiorem per minorem diuidamus, notentur hæc. *Primo* à ſiniſtra verſus dextram in operatione procedendum; adeoque figuram vltimam diuiſoris ſub vltima diuidendi collocandam, ſiquidem vltima diuiſoris minor ſit vltima diuidendi, aut æqualis, ſi maior ſub penultima. Quod ſi vna, duæ, aut etiam plures diuidendi, & diuiſoris verſus ſiniſtram ſint æquales, & penultima, aut antepenultima &c Diuiſoris maior, erit nihilominus vltima diuiſoris ſub penultima diuidendi collocanda, vt hic apparet.

45678
458

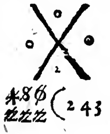
Secundo. ſi diuiſor plures habuerit figuras per omnes quotum inuentum eſſe multiplicandum, & productum ex diuidendo ſubtrahendum.

Tertio, abſoluta vna operatione, diuiſorem per vnam figuram verſus dextram promouendum, & ſi nihil accipi poſsit, cyphram ad quotum ponendam (quoties enim promouetur diuiſor, aliquid ad quotum ponitur) rurſusq; diuiſorem promouendum.

Quarto, quantum pro quoto accipiendum ſit, vſu potius, & praxi, quam præceptis diſcitur; poteſt tamen aliquid ſubſidij menſa Pythagoræ præſtare, ſi nimirum

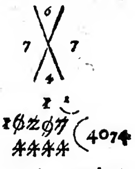
pri-

prima diuiſoris figura in latere ſiniſtro, in cellulis dextrorſum figuræ reſpondentibus, numerus diuidendus ſupra primam diuiſoris figuram poſitus, aut ſi non inueniatur, proximè minor quæratur; nam ſi ab illo numero vſque ad caput tabulæ aſcendatur, erit numerus in capite inuentus, numerus ad quotum ponendus, aut certè minor.



His obſeruatis, ſint primo 486 per 2 diuidenda. Pono 2 ſub 4, & video quoties 2 in 4 contineantur; continētur bis: 2. ergo poſt lunulam pono. Deinde promoto diuiſore 2 ſub 8, video quoties 2 in 8 contineantur; vel quæro 2 in latere ſiniſtro menſæ Pythagoræ, & dextrorſum vſq; ad 8 pergo; & hinc vſq; ad caput tabulæ aſcẽdo, & offendo in capite 4 quæ ad quotum pono. Promoueo deinde rurſus diuiſorem 2 ſub 6, & video eum ter in 6 contineri: 3 ergo ad quotum pono, & eſt operatio abſoluta.

Secundum exemplum. Sint 16297 per 4 diuidenda, hoc eſt, quatuor inter ſe diuidant 16297 aureos. Pono diuiſorem 4 ſub 6, non ſub 1, quod 4 plura ſint quam 1, & dico 4 in 16 continentur quater: vel quæro in latere ſiniſtro menſæ Pythagoræ 4, & dextrorſum vſque ad 16 pergo, & hinc ad caput aſcendo, reperioq; 4: quibus poſt lunulā poſitis, deletiſque 1, 6, 4, promoueo diuiſorem 4 ſub 2. & video 4 in 2 non contineri, cum 4 excedant 2. Poſita ergo ad quotum cyphra, promotoque diuiſore



4 ſub

4. ſub 9. Dico 4 in 29 continentur ſepties; ſeu quæro 4 in latere ſiniſtro tabulæ, dextrorſumque vſque ad 28, numerum proximè minorem numero 29. pergo, & hinc ad caput aſcendo, reperioque 7; quibus ad quotum poſitis, & 1, quo 29 excedunt 28, ſupra 9 collocato, promoueo diuiſorem 4 ſub 7, & video 4 in 17 quater contineri, & reſtare 1. Igitur 4. ad quotum, & 1 ſupra 7 poſitis, erit diuiſio abſoluta. Hoc eſt, ſi 4 inter ſe 16297 aureos diuidant, capiet quilibet 4074. ſupereſt 1.

Tertium exemplum. Sint 980540 per 368 diuidenda. Collocatis numeris more conſueto, vt in prima operatione vides, aduerte quoties 3 in 9 contineantur; continentur quidem ter: ſed 3 accipere non potes, quod ter ſex faciant 18, quæ ex 8 ſupra 6 poſitis auferri non poſſunt; cum 18. excedant 8: accipe ergo tantum 2, quibus ad quotum poſitis, duc omnes diuiſoris figuras in quotum 2, dicendo bis 3. ſunt 6, quibus ex 9 ſubtractis, reſtant 3, quæ pone ſupra 9, deletis 9 & 3, & dic bis 6 faciunt 12, quibus ex 38 ſubtractis, reſtant 26, vt in ſecunda operatione cernis. Dic tertio bis 8 faciunt 16, quibus ex 260 ſubtractis, reſtant 244, vt in tertia operatione cernis. Promoto iam diuiſore, hoc eſt, poſitis 3 ſub 6. ſex ſub 8, octo ſub 5, vt in tertia apparet operatione, vide quoties 3. in 24 cõtineantur; cõtinentur quidẽ octies:

3 Operat. 1.
~~9~~80540(2
~~3~~68

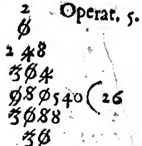
2 Operat. 2.
~~3~~6
~~9~~80560(2
~~3~~~~6~~8

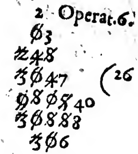
24 Oper. 3.
~~3~~~~6~~4
~~9~~8~~0~~549(2
~~3~~~~6~~88
36

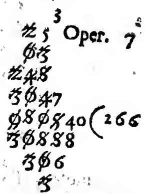
6 Oper. 4.
~~2~~~~4~~
~~3~~~~6~~4
~~9~~8~~0~~540(26
~~3~~~~6~~88
~~3~~6

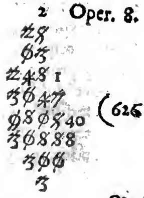
ſed

ſed 8 propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere non potes: imo ne 7 quidem, ſiquidem ſi 7 acciperes, reſtarent 34, ex quibus 42, quæ fiunt ex ductu 6 in 7, auferri non poſſunt. Accipe ergo tantum 6, & reſtant 6. Poſitis itaque 6 poſt lunulam & 6 reſiduis ſupra 4, vt in quarta operat. Dic ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 64 ſubtractis, reſtant 28 vt in quinta operat. cernis. Dic quoque octies 6 faciunt 48, quibus ex 285 ſubtractis, reſtant 237, vt in ſexta oper. vides. Promoto iterum diuiſore, vt in ſexta operatione apparet, vide quoties 3 in 23. contineantur: continentur quidem ſepties; at propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere 7 non potes: accipe ergo tantum 6, & reſtant 5, vt in ſeptima operat. cernis. Dic iam ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 57 ſubtractis, reſtant 21, vt in octaua operat. vides. Dic quoque ſexies 8 faciunt 48, quibus ex 214 ſubtractis, reſtant 166, vt in nona operat. cernis.









4. ſub 9. Dico 4 in 29 continentur ſepties; ſeu quæro 4 in latere ſiniſtro tabulæ, dextrorſumque vſque ad 28, numerum proximè minorem numero 29. pergo, & hinc ad caput aſcendo, reperioque 7; quibus ad quotum poſitis, & 1, quo 29 excedunt 28, ſupra 9 collocato, promoueo diuiſorem 4 ſub 7, & video 4 in 17 quater contineri, & reſtare 1. Igitur 4. ad quotum, & 1 ſupra 7 poſitis, erit diuiſio abſoluta. Hoc eſt, ſi 4 inter ſe 16297 aureos diuidant, capiet quilibet 4074. ſupereſt 1.

Tertium exemplum. Sint 980540 per 368 diuidenda. Collocatis numeris more conſueto, vt in prima operatione vides, aduerte quoties 3 in 9 contineantur; continentur quidem ter: ſed 3 accipere non potes, quod ter ſex faciant 18, quæ ex 8 ſupra 6 poſitis auferri non poſſunt; cum 18. excedant 8: accipe ergo tantum 2, quibus ad quotum poſitis, duc omnes diuiſoris figuras in quotum 2, dicendo bis 3. ſunt 6, quibus ex 9 ſubtractis, reſtant 3, quæ pone ſupra 9, deletis 9 & 3, & dic bis 6 faciunt 12, quibus ex 38 ſubtractis, reſtant 26, vt in ſecunda operatione cernis. Dic tertio bis 8 faciunt 16, quibus ex 260 ſubtractis, reſtant 244, vt in tertia operatione cernis. Promoto iam diuiſore, hoc eſt, poſitis 3 ſub 6. ſex ſub 8, octo ſub 5, vt in tertia apparet operatione, vide quoties 3. in 24 cõtineantur; cõtinentur quidẽ octies:

```
3   Operat. 1.
980540(2
368

2   Operat. 2.
36
980560(2
368

24  Oper. 3.
364
980549(2
3688
 36

6   Oper. 4.
24
364
980540(26
3688
 36
```

ſed

ſed 8 propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere non potes: imo ne 7 quidem, ſiquidem ſi 7 acciperes, reſtarent 34, ex quibus 42, quæ fiunt ex ductu 6 in 7. auferri non poſſunt. Accipe ergo tantum 6, & reſtant 6. Poſitis itaque 6 poſt lunulam & 6 reſiduis ſupra 4, vt in quarta operat. Dic ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 64 ſubtractis, reſtant 28 vt in quinta operat. cernis. Dic quoque octies 6 faciunt 48, quibus ex 285 ſubtractis, reſtant 237, vt in ſexta oper. vides. Promoto iterum diuiſore, vt in ſexta operatione apparet, vide quoties 3 in 23. contineantur: continentur quidem ſepties; at propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere 7 non potes: accipe ergo tantum 6, & reſtant 5, vt in ſeptima operat. cernis. Dic iam ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 57 ſubtractis, reſtant 21, vt in octaua operat. vides. Dic quoque ſexies 8 faciunt 48, quibus ex 214 ſubtractis, reſtant 166, vt in nona operat. cernis.

Operat. 5.

2
6
2 48
364
686540 (26
3688
36

Operat. 6.

2
63
248
3647 (26
686840
36888
366

Oper. 7.

3 2
25
63
248
3647
686840 (266
36888
366
3

Oper. 8.

2
28
63
248 1
3647
686840 (626
36888
366
3

Operatio 9.	Operatio 10.
1	1
2	2
25	254
036	030
2481	2481
30476	30476
080540 (266	080540
308888	308888 (2664
3006	3006
33	33

Operatio 11.

1 1
22
254
0308
2481 12
304708
080540 (2664
308888
3000
33



Promoto rurſus diuiſore, vt in nona apparet operatione. Vide quoties 3 in 16 contineantur; continentur quidem quinquies: verum 5 propter ſequentes diuiſoris figuras accipere nequis : accipe ergo tantum 4, & reſtant 4. poſitis itaque 4 poſt lunulam, & 4 reſiduis ſupra 6, vt in decima operat. cernis, multiplica tam 6, quàm 8 diuiſores per 4, & producta ſubtrahe ex 460, vt hactenus docuimus, eritque tota diuiſio abſoluta, vt in vndecima operatione vides. Repetiui toties exemplum

emplum, non quod neceſſe ſit; ſed vt quilibet facile proprio Marte diuiſionem, quæ aliquid difficultatis habere videtur, poſsit diſcere.

Quartum exemplum. Sint 1531100 per 305 diuidenda. Collocato exemplo, vt vides in prima operatione. Dic 3 in 15 continentur quinquies: poſitis ergo 5 poſt lunulam, deletisq; delendis, dic quinquies 5 faciunt 25 (nam cyphra non curatur) ſubtractis ergo 25 ex 31 reſtāt 6, vt in ſec. oper. vides. Iam quia pro moto diuiſore nihil eſt ſupra diuiſorē 3: poſita ergo ad quotum figura 0, promoue diuiſorē denuo vt in 3. oper. cernis, & dic 3 in 6 continentur bis, reſtat nihil: poſitis ergo 2 ad quotū, dic bis 5 faciunt 10; quibus ex 10 ſubtractis, reſtat nihil. Et quia in diuidendo nihil ſupereſt; eſtq; diuiſor ſemel adhuc promouendus, pono 0 ad quotū, & erit diuiſio perfecta.

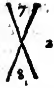
Operatio 1.

1531100(5
305

Operatio 2.

6
1531100(50
3055
30

3. Operat.



6
1531100(5020
305505
3

Etiam hoc animaduertendum eſt, cum verſus dextram diuiſor habet cyphras, eas ad finē numeri diuidendi promouendas, & cū reliquis diuiſoris figuris dūtaxat operandū, vt in hoc quinto exēplo, in quo 850670 per 6400 diuidenda proponuntur, eſt videre.

1
3
218
850670(13
644 00
6

EXAMEN.

Abijce tam ex quoto, quàm ex diuiſore 9, quoties poteſ, reſidua in ſuperiore, & in inferiore crucis parte poſita, duc in ſe; atque ex eo, quod inde fit, & reſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit, rurſus abijce 9, quoties potes: reſiduo huic ſi æquale fuerit reſiduum numeri diuidendi, probabile eſt operationem bonam eſſe. Si æquale non fuerit, certum eſt erratum eſſe. Exempli cauſa, reiectis ex quotis 9, quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo, 0; in ſecundo 6; in tertio, 0; in quarto 7. quæ ponũtur in ſuprema parte crucis. Reiectis quoque 9 ex diuiſoribus, quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo 2; in ſecũdo 4; in tertio 8; in quarto 8, quę ponũtur in inferiore parte crucis. Ductis iam reſiduis illis in ſe, producuntur in primo exemplo, 0; in ſecundo 24; in tertio, 0; in quarto 56. His ſi addantur reſidua diuiſionis, fient in exemplo ſecundo (nam in primo, & quarto nullum eſt reſiduum) 25: in tertio 8. Reiectis hinc rurſus 9, quoties fieri poteſt, reſtant, in primo exemplo, 0, in ſecundo 7; in tertio 8, in quarto 2; quæ ad alterum latus crucis ponuntur. Quod ſi reiectis 9, quoties fieri poteſt, ex numeris diuidendis, ſuperfuerint, in exemplo primo 0; in ſecundo 7; in tertio 8; in quarto 2, probabile eſt operationes probas eſſe.

Certiſsima probatio eſt, quæ fit per Multiplicationẽ, hoc modo: Ducatur diuiſor in quotum, producto addatur reſiduum diuiſionis, ſi quod fuerit; nam ſi hoc vltimum productum æquale fuerit numero diuidendo, rectè ſe habet operatio. Eodem modo per diuiſionem multiplicatio examinatur. Si enim productum diuidatur

tur per alterutrum multiplicantem, atq; in quoto alter multiplicans prouenerit, rectè ſe habet operatio.

CAPVT II.

DE FRACTORVM NVMERORVM elementis.

Numerus fractus eſt pars, vel partes alicuius integri & ſcribitur hoc modo. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{81}{120}$; *primus ſignificat dimidium, ſecundus duas tertias partes alicuius integri hoc eſt inferior ſignificat totum alis quod diuiſum eſſe in tres partes; at ſuperior ex tribus illis, duas duntaxat acceptas eſſe innuit. Tertius ſignificat tres quartas partes. Quartus quinq; ſeptimas. Quintus ſeptem duodecimas. Sextus octoginta vnam centeſimas vigeſimas. Inferior dicitur Denominator, quod nominet, in quot partes totum ſit diuiſum: Superior Numerator, quod numeret partes acceptas ex partibus, in quas totum diuiſum eſt. Exempli cauſa, ſi aureus eſſet diuiſus in 60 partes, & ego ex illis accepiſſem 27, haberem* $\frac{27}{60}$ *nempe viginti ſeptem ſexageſimas, hoc eſt, 27 cruciferos. Sed iam ad præcepta pergimus.*

ARTICVLVS I.

FRACTIONES AD MINORES terminos reducere.

Reducere fractionem ad minores terminos, eſt effi-

cere, vt tam numerator, quàm denominator minores quidem fiant, eandem tamen, quam prius, proportionem inter ſe conſeruent: ita ex hac fractione $\frac{6}{12}$, poteſt & hæc fieri $\frac{3}{6}$, & hæc $\frac{1}{2}$, ſiquidem in omnibus tribus denominator eſt duplus numeratoris, omneſque dimidium ſignificant.

Reducturus ergo magnam aliquam fractionem ad minores terminos, ſubtrahe tamdiu minorem terminũ ex maiore, donec ſubtrahendus, & reſiduus, æquales fiant. Aut diuide tandiu maiorem per minorẽ, donec nihil remaneat; tunc enim vterque Denominator, & Numerator diuidendus erit per reſiduũ illud, aut vltimum diuiſorem. Sit hæc fractio $\frac{63}{91}$ ad minores terminos reducenda: ſubtrahe 63 ex 91, reſtant 28. Deinde ſubtrahe 28 ex 63, reſtant 35: rurſus ſubtrahe 28 ex 35, ſuperſunt 7. Item ſubtrahe 7 ex 28, reſtant 21; iterumque ſubtrahe 7 ex 21, reſtant 14; ac deniq; ſubtrahe 7 ex 14, ſuperſunt 7, quæ eſt vtriuſq; numeratoris & denominatoris menſura maxima, per quam ſi tam 63, quàm 91, diuiſeris, prouenient 9, & 13; erit igitur hæc fractio $\frac{63}{91}$, ad hanc $\frac{9}{13}$ reducta. Vel diuide 91 per 63, reſtant 28; deinde diuide 63 per 28, reſtant 7: deniq; diuide 28 per 7, reſtat nihil: erit igitur vltimus hic diuiſor 7, numerus per quem tam 91, quàm 63 diuidendus eſt. Quod ſi in hac mutua ſubtractione, nunquã ſubtrahendus reſiduo æqualis fiat: & in mutua illa diuiſione, ſemper aliquid ſuperſit, donec ad vnitatem perueniatur, nõ poterit illa fractio ad minores terminos reduci, vt videre eſt in hac fractione $\frac{17}{24}$, quæ ad minores terminos reduci nequit. Dicitur numerus, per quem vterq;, tam Numerator, quam Denominator diuiditur, communis vtriuſq; menſura.

Nu-

Numeri verò,qui eiuſmodi menſuram habent, dicuntur numeri inter ſe compoſiti; qui non habent, dicuntur inter ſe primi, vt videre licet in ſeptimo Elemētorum Euclidis.

ARTICVLVS II.

DVAS AVT PLVRES FRACTIONES, ad eandem denominationem reducere.

Reducere fractiones ad eandem denominationem, eſt efficere, vt eundem Denominatorem acquirant. Duas ergo fractiones ad eandem denominationem reducturus, multiplica inter ſe denominatores, vt habeatur communis denominator. Pro numeratoribus vero nouis, duc denominatores in numeratores per crucem. *Exemplum.* Sint hæ duæ fractiones $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$, ad eandem denominationem reducendæ. Duc denominatores in ſe, & fient 24, communis Denominator. Pro Numeratoribus duc per crucem, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \mid \frac{18}{24}, \frac{20}{24}$, pro primo 3 in 6; pro ſecundo 5 in 4, vt fiant 18 & 20, vt in exemplo apparet, Valent igitur idem tam $\frac{3}{4}, \frac{18}{24}$, quam $\frac{5}{6}, \frac{20}{24}$ Reducturus tres, quatuor aut plures fractiones ad eandem denominationem, duc primæ Denominatorem in Denominatorem ſecundæ; productum in Denominatorem tertiæ; & hoc productum in Denominatorem quartæ &c. Et erit poſtremum productum, Denominator cōmunis. Pro numeratoribus nouis, duc numeratores reducendos in denominatorē iam inuentum; productū diuide per Denominatores reducēdos

& erunt quoti numeratores noui. Exemplũ. ſint hę quatuor fractiones $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ ad eandem denominationem reducendæ. Duc Denominatores in ſe, hoc eſt, 2 in 3, & fient 6; hoc productum in 4, fientque 24, hoc in 5, & fient 120, communis Denominator. Pro primo nouo Numeratore duc 1 in 120, productum diuide per 2 & prouenient 60. Pro ſecundo, duc 2 in 120, productum diuide per 3, & inuenies 80. Pro tertio, duc 3 in 120, productum diuide per 4 & prodibunt 90. Pro quarto duc 4 in 120, productum diuide per 5 & reperies 96, vt in his exemplis apparet $\frac{60}{120}, \frac{80}{120}, \frac{90}{120}, \frac{96}{120}$.

Sed obſeruandum, denominatorem communem fieri poſſe minorem; ſi productum præcedentium denominatorum, & denominator ſequentis fractionis, habeant communem menſuram. Vt in his $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, habent productum duorum priorum denominatorum, quod eſt 6, & denominator ſequentis fractionis, qui eſt 4, hãc menſuram 2; per quam ſi tam 6 quàm 4, diuiſeris, prouenient 3 & 2. Si rurſus, aut 6 in quotũ 2; aut 4 in quotum 3 duxeris, producetur trium priorum fractionum communis denominator 12. Hic in denominatorem quartæ ductus, producit communem omnium Denominatorem 60. Si iam porrò per regulam traditam operatus fueris, inuenies has fractiones $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ad has $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$ reductas.

Item ſi hæ fractiones $\frac{3}{4}, \frac{11}{12}, \frac{17}{18}$ ad eandem denominationem ſint reducendæ, ita agito. Denominatores primæ & ſecundæ fractionis, nempe 4 & 12, habent communem menſuram 4, ſi ergo tam 4, quàm 12, per

4 di-

4 diuiſoris, prouenient 1 & 3. Rurſus ſiue 12 in 1, ſiue 4 in 3 duxeris, reperies 12. Iam quia 12. denominator primæ & ſecundę fractionis, & 18 denominator tertiæ, habent communem menſuram 6, ſi per eam tam 12, quàm 18 diuidas, prouenient 2 & 3; quare ſi vel 18 in 2, vel 12 in 3 duxeris, prouenient 36, denominator communis $\frac{27}{36}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{34}{36}$. Numeratores nouos facilè, per ſupra dicta, inuenies.

Articvlvs III.

De Additione et Svbtractione fractorum.

Nihil eſt facilius, quàm duas, aut plures fractiones inuicem addere, aut minorem ex maiore ſubducere. Nam ſi duæ, aut plures, eundem habeant denominatorem, adduntur inuicem Numeratores, & ſuponitur illis communis denominator. Vt ſi hæ fractiones $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ eundem habentes denominatorem addendæ ſint, adduntur 3, 5, 6, & conflantur 14, quibus ſupponitur communis denominator 7, hoc modo $\frac{14}{7}$. Si iam 4 per 7 diuiſeris, prouenient 2, ſumma dictarum fractionum.

Si habeant diuerſos denominatores, reducuntur prius ad eandem denominationem; ac deinde, vt prius numeratores inuicem adduntur. Sint hæ fractiones $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$ $\frac{17}{18}$ addendæ; reductæ faciunt has $\frac{27}{36}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{34}{36}$ ſumma numeratorum eſt 94, qua per 36 diuiſa, proueniũt 2 $\frac{22}{66}$, ſiue 2 $\frac{11}{18}$, in minimis terminis.

Hæ verò $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ad eandem denominationem reductæ, faciunt $\frac{20}{60}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{12}{60}$; ſumma numeratorum

 eſt

eſt 47; ſumma omnium $\frac{47}{60}$. Eodem modo, ſi fractio minor ex maiore ſit ſubtrahenda, agendum eſt. Et ſi quidem eundem habeant denominatorem, ſubtrahatur minor numerator ex maiore, reſiduo ſupponatur communis denominator. Vt ſi hæc fractio $\frac{2}{7}$ ex hac $\frac{5}{7}$, ſit ſubtrahenda, ſubtrahantur 2 ex 5, reſtant 3, quibus ſi ſupponantur 7, fiet reſidua hæc fractio $\frac{3}{7}$.

Si non habeant eundem denominatorem, reducantur ad eundẽ; deinde ſubtrahatur minor numerator ex maiore, reſiduo ſupponatur communis denominator. Vt ſi hæc $\frac{5}{12}$ ex hac $\frac{17}{18}$, ſit ſubtrahenda, reductæ ad eandem denominationem, faciunt $\frac{90}{216}$, $\frac{204}{216}$, in minimis terminis $\frac{15}{36}$, $\frac{34}{36}$; & 15 ſubtracta ex 34, relinquunt 19, quibus ſi ſupponatur communis denominator 36, fiet reliqua hæc fractio $\frac{19}{36}$.

Contingit interdum, vt maior fractio ex minore ſit ſubtrahenda, quando nimirum fractis integra adhæret. Exempli cauſa, ſint 12 $\frac{5}{6}$ ex 24 $\frac{2}{7}$ ſubtrahenda, quia fractio hæc $\frac{5}{6}$ maior eſt, quam hæc $\frac{2}{7}$; ſiquidem 7 in 5 ducta plus faciunt, quam 6 in 2 (ſemper autem illa fractio maior eſt, cuius numerator in alterius denominatorem ductus, plus facit, quam alterius Numerator ductus in denominatorem ipſius) ſi inquam 12 $\frac{5}{6}$ ex 24 $\frac{2}{7}$ ſubtrahenda proponantur, frangatur vnum integrum, hoc eſt, addantur ad Numeratorem fractionis $\frac{2}{7}$ ſeptem, & tollatur vnum ex integris, hoc modo 23 $\frac{9}{7}$. Iam ſi ſubtrahantur 12 ex 23; & $\frac{5}{6}$ ex $\frac{9}{7}$, reſtabunt 11 $\frac{19}{42}$: Nam $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{7}$ ad eandem denominationem reductæ, faciunt $\frac{35}{42}$, $\frac{54}{42}$, & 35 ex 54 ſubtracta, relinquunt $\frac{19}{42}$: ergo ſi 12 $\frac{5}{6}$ ex 24 $\frac{2}{7}$ ſubtrahantur, reſtant 11 $\frac{19}{42}$.

Arti-

ARTICVLVS IV.

DE MVLTIPLICATIONE ET DIuiſione fractorum.

Multiplicatio & diuiſio fractorum faciles ſunt: nam ſi in Multiplicatione, tam Numeratores, quam denominatores in ſe multiplicentur, perfecta erit multiplicatio. Sit hæc fractio $\frac{7}{12}$ in hanc $\frac{5}{8}$ multiplicanda, duco tam ſuperiores 7, 5, quã inferiores 12, 8 in ſe, & produco $\frac{35}{96}$.

Si vna per alteram ſit diuidenda, inuertendus eſt diuiſor, & poſtea vt in multiplicatione operandum. Sit hæc $\frac{11}{12}$ per hanc $\frac{4}{7}$ diuidenda. Inuerto diuiſorem ſic $\frac{7}{4}$; quo facto, duco tam 11 in 7, quam 12 in 4, & produco hanc fractionem $\frac{77}{48}$; ſiue (facta diuiſione) hanc $1\frac{29}{48}$, ſemper enim, quando ſuperior maior eſt inferiore, diuiſio fieri poteſt, licet non ſemper ſit neceſſe; imo interdum commodius eſt, ſi non fiat.

Quod ſi, vt ſæpe contingit, fractis adhæreant integra, frangenda prius ſunt integra, hoc eſt, multiplicanda per denominatorem & productum Numeratori addendũ. Sint hæc $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ multiplicãda: duco 12 in 7, & produco 84 quæ addo Numeratori, & cõflo $\frac{89}{7}$. ductis iam tam 89 in 4, quã 7 in 9, produco $\frac{356}{63}$, &, facta diuiſione, $5\frac{41}{63}$. Igitur ſi multiplicentur $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$, producũtur $5\frac{41}{63}$.

Si ſint $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ diuidenda, inuerto diuiſorem ſic $\frac{9}{4}$, & diuidendum, vt prius, reſoluo, ſtabuntq; ſic numeri $\frac{89}{7}$ $\frac{9}{4}$; ductis igitur tam ſuperioribus, quam inferioribus in ſe, producuntur $\frac{801}{28}$, ſiue facta diuiſione, $28\frac{17}{28}$: ſi ergo $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ diuidantur proueniunt $28\frac{17}{28}$. Cur autem cũ integer per fractũ multiplicatur, minus integro;

cum

cùm verò integer per fractum diuiditur plus integro proueniat, dicetur, lib. 1. cap. 4. art. 6. Annot. 2.

Si vtrique fractioni adhærcant integra, vtriuſq, integra reſoluta, numeratoribus addi debent, ac deinde iuxta traditā regulā agendum. Sint enim $7\frac{2}{3}$ per $3\frac{3}{4}$ multiplicanda; reſoluta ſic habent $\frac{23}{3}$, $\frac{15}{4}$; ductis tam ſuperioribus, quā inferioribus in ſe, ſic $\frac{345}{12}$; & facta diuiſione ſic $28\frac{9}{12}$; ſiue ſic $28\frac{3}{4}$.

Si verò $7\frac{2}{3}$ ſint per $3\frac{3}{4}$ diuidenda, inuerto diuiſorē, ſtabitque ſic exemplum $\frac{23}{3}$, $\frac{4}{15}$, & facta multiplicatione ſic $\frac{92}{45}$, & diuiſione ſic $2\frac{2}{45}$.

Deniq; ſi integer per fractum ſit multiplicādus, ſuppono integro vnitatem. Vt ſi velim 12 per $\frac{3}{5}$ multiplicare, ſtabit ſic exemplum $\frac{12}{1}$, $\frac{3}{5}$; facta multiplicatione ſic $\frac{36}{5}$; & diuiſione ſic $7\frac{1}{5}$.

Eodem modo, ſi velim 12 per $\frac{3}{5}$ diuidere, ſuppono integro vnitatem, & inuerto diuiſorem hoc modo $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{1}$; facta igitur multiplicatione producuntur $\frac{60}{3}$; & diuiſione, 20. Ergo ſi 12 per $\frac{3}{5}$ diuidantur, proueniunt 20.

Articvlvs V.

De Fractionibvs Fractorvm numerorum.

Occurrunt interdum fractorum fractiones, quod quando fit, duc tam ſuperiores, quàm inferiores in ſe, & habebis illorum valorem. Vt ſi ſit huius fractionis $\frac{5}{7}$, hęc fractio $\frac{3}{5}$ reduces eas ad hanc $\frac{15}{35}$, ſiue ad hanc $\frac{3}{7}$. Si huius $\frac{21}{60}$, hæc $\frac{3}{7}$, reduces eas ad hanc $\frac{63}{420}$, ſiue ad $\frac{9}{60}$, ſiue ad $\frac{3}{20}$ nam ſi $\frac{21}{60}$ ponātur viginti vna ſexageſimæ vnius floreni, erunt $\frac{21}{60}$ viginti vnus cruciferi ac proinde tres ſeptimæ vigin-

viginti vnius cruciferorum, erunt 9 cruciferi, ſiue tres triarij.

Capvt III.

DE REGVLIS, ET EARVM VSV.

Multi multas tradunt regulas, ſuo quilibet inſtituto accommodatas. Ego quatuor, ſaluo aliorum iudicio, ſufficere iudico, Auream nimirum illam proportionum regulam: Regulas item conſortij, Alligationis, & poſitionum.

Articvlvs I.

DE REGVLA PROPORTIONVM.

Vt hęc regula melius intelligatur, aliquid de proportionibus dicendum eſt. Scire ergo oportet, tunc quatuor numeros apud Arithmeticos dici proportionales, ſi primo, & tertio in quemcunque numerum multiplicato; Item ſecundo, & quarto, in eundem, aut alium quẽcunque, ſemper quando productum primi maius eſt producto ſecundi, etiam productum tertij maius ſit producto quarti. Et ſi productum primi ſit æquale producto ſecundi, etiam productum tertij æquale ſit producto quarti. Ac denique ſi productum primi minus ſit producto ſecũdi, etiam productũ tertij minus ſit producto quarti. Si inquam hoc ſemper contingat, tunc quatuor illi numeri dicuntur eſſe proportionales: ſi verò non ſemper contingat, proportionales non dicun-

cuntur. Item per 16. ſexti, & 19 ſept. tunc demonſtrantur quatuor numeri eſſe proportionales, quando genitus ex primo, & quarto, æqualis eſt genito ex ſecundo, & tertio. Vnde conſtat in Multiplicatione productum, duos multiplicantes, & vnitatem, eſſe proportionales: ſi nimirum productũ, & vnitas extremas, multiplicantes medias ſedes occupent. Eodem modo in diuiſione proportionales erunt. Numerus diuidendus, Diuiſor, quotus, & vnitas; ſi diuidendus, & vnitas extremas, Diuiſor, & quotus medias ſedes occupent. Sed cum de proportione plura dicenda ſint cap. 4. regulam ipſam aggredimur.

Regula proportionum, etſi vnica eſt; quadrimembris tamen, facilitatis gratia, eſto. Directa ſimplex, Reciproca ſimplex, Directa compoſita, Reciproca compoſita. Dicitur hæc regula, etiam regula Trium, quod ex tribus numeris notis, quartus ignotus per illam eruatur. Dicitur quoque, propter præſtantiam, qua reliquas ſuperat, regula aurea.

DE REGVLA PROPORTIONVM DIrecta ſimplici.

In hac regula ſemper ſunt tres numeri cogniti, quorum duo homogenei inter ſe ſunt, tertius homogeneus numero inueniendo. In collocatione primo loco ponitur ille homogeneus, qui quæſtionem annexam non habet, ſeu cuius valor iam cognitus eſt. Reliqui duo noti, ponuntur ſecundo & tertio loco, ſecundo quidem homogeneus inueniendo, tertio homogeneus primo loco ponendo. Quod etſi in directa opus non eſt, in recipro-

ciprocâ tamen neceſſarium prorſus eſt. Facta collocatione ducitur ſecundus in tertium; productum diuiditur per primum, & prouenit quæſitum.

ANNOTATIO.

Vtimur in exemplis moneta in Romano imperio vſitatiore, nimirum aureis, triarijs, cruciferis, & obolis. Aureus habet 20 *triarios*, 60 *cruciferos*, 420 *obolos. Triarius habet* 3 *cruciferos*, 21 *obolos, Crucifer habet* 7 *obolos.*

EXEMPLA.

Exemplum primū. 20 aureis emo 16 vlnas pãni, quot vlnas emo & 45 aureis? Hic vides homogeneos eſſe 20, & 45 aureos quæſtionem annexam habere 45 aureos. Primo ergo loco pono 20. au. ſecundo, 16 vlnas. Tertio 45 aureos, hoc modo. 20 au. | 16. vl. | 45 au. Facta operatione iuxta regulam, reperio 36 vlnas. Nam 16 in 45 ducta gignunt 720, quæ per 20 diuiſa, reddunt 36.

Secundum exemplum. Quidam dat pro menſa vno die 9 cruciferos, quæro quid vno anno dare debeat? Sciendum hic eſt, vnum annum habere dies 365. ſtabit ergo ſic exemplum 1 D. | 9 cruc. | 365 D. Facta operatione reperies cruciferos 3285, quibus diuiſis per 60 (quod vnus aureus 60 cruciferos habere pônatur) reperies aureos 54, cruciferos 45. Atque tantum vno anno dare debet.

Tertium exemplum. Vna libra carnis venditur 3 cruciferis, 4 obolis, quanti venduntur 100 libræ? Reſolue cruciferos in obolos, hoc eſt, duc in 7; producto adde 4, fientque 25 oboli. Quo facto ſic habet exemplum. 1 lib. | 25 ob. | 100 lib. Operatione facta reperies 2500 obolos, quibus per 420 diuiſis (quod vnus aureus

reus 4 2 0 obolos habere ponatur) proueniunt aurei 5, reſtant 400 oboli. Quibus per 7 diuiſis, proueniunt 57 cruciferi, reſtat vnus obolus. Ergo ſi 1. libra carnis vendatur 3 cruciferis, 4 obolis, vendentur 100 libræ, aureis 5, cruciferis 57, obolo vno.

Quartum. 10 aureis, 25 cruciferis, emo 2 vrnas & 32 menſuras vini : quanti emo 20 vrnas? Quia in hac quæſtione homogeneæ res ſunt vrnæ, & menſuræ, & quæſtionem annexam habent 20 vrnæ, debent primo loco poni 2 vrnæ, & 32 menſuræ, adeoque quæſtio in hunc modum formanda. Vrnæ 2, & 32 menſuræ dant 10 aureos, 25 cruciferos; quid dant 20 vrnæ? Reſolue vrnas in menſuras, aureos in cruciferos (habet vna vrna menſuras 64, vnus aureus 60 cruciferos) & ſtabit ſic exemplum. 160 Menſ. | 625 cruc. | 1280 Menſ. | Facta operatione reperies 5000 cruciferos, quibus per 60 diuiſis, proueniunt 83 aurei reſtant 20 cruciferi. Ergo ſi 2 vrnæ, 32 menſuræ emuntur 10 aureis, 25 cruciferis, ementur 20 vrnæ, 83 aureis, 20 cruciferis.

Quintum. Quidam emit 2 au. 18 $\frac{3}{4}$ crucif. 1 $\frac{3}{2}$ vlnas panni, quot emet vlnas, 89 au. 40 cruciferis? Duo aurei habent 120 cruciferos quibus ſi addas 18 $\frac{3}{4}$, cruciferos habebis 138, $\frac{3}{4}$ aurei 98 habent 5880 crucif. quibus ſi addas 40 crucif. conflabis 5920. Exemplum ergo, facta reſolutione fractorum, integro vnitate ſuppoſita, & termino primo, qui diuiſor eſt, inuerſo, ſic ſtat $\frac{4}{555}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5920}{1}$. Ductis 4 in 3 produco 12; his in 5920 progigno 71040, qui eſt numerus diuidendus. At ducto 1 in 2 creo 2, his in 555 efficio 1110, qui eſt diuiſor. Diuiſis ergo 71040 per 1110, proueniunt 64 vlnæ.

Sextum

Sextum, Quidam mercator emit Monachij 400 medimnos ſalis, quemlibet vno aureo, 54 cruciferis. Hos Noribergam vexit, atque Monachio Ingolſtadium vſque pro vectura, & vectigalibus expendit pro quolibet medimno 5 cruciferos; Ingolſtadij vendidit 180 medimnos quemlibet 2 aureis, reliquos 220 Noribergam vexit, deditque pro vectura, & vectigalibus pro quolibet medimno 4 cruciferos; quærit ſi 30 aureos lucrari velit, quanti quemlibet medimnum Noribergæ vendere debeat? Dico primo vnus medimnus dat 1. au. 54. crucif. ſiue 114 cruciferos; quid dant 400 medimni? Et reperio cruciferos 45600. Quia verò pro quolibet medimno expendit 5 cruciferos, ſi duxero 5 in 400, reperio crucif. 2000. Iterum qui Ingolſtadio Noribergam pro quolibet 220 medimnorum expendit 4 cruciferos, duco 220 in 4, & produco 880 cruciferos. Summa omnium eſt aureorum 808. Porrò quia 180 medimnos vendidit 360 au. quemlibet medimnum 2 aureis, ſi 360 aureos ex 808 ſubtraxero, relinquentur 448 aurei: ſed quia 30 aureos vult lucrari, addo illis 30, vt fiant 478. Atque hos aureos diuido per 220 medimnos Noribergam vectos, inuenioque quemlibet 2 aureis, 10 $\frac{4}{11}$, cruciferis vendendum eſſe. Nam ſi diuidantur 478 per 220, proueniunt 2 au. reſtant 38; quibus in 60 ductis, productoque per 220 diuiſo, proueniunt 10 $\frac{4}{11}$ cruciferi.

Septimum. Mercator emit 8 vlnas panni 10 au. vult 10 vlnas vendere 15 aureis, quærit quod vlnæ ſibi emendæ ſint, vt lucretur 100 aureos? Dico primo. 8 vlnæ dant 10 au. quid dant 10 vlnæ? & reperio 12 $\frac{1}{2}$ au. Ergo ſi 8 vlnas emit 10 aureis, emet 10 vlnas 12 $\frac{1}{2}$

aureis

aureis. Verũ cum 10 vlnas vẽdere velit 15. aureis lucratur 10 vlnis 2 $\frac{1}{2}$ aureos, (ſubtracti enim 12 $\frac{1}{2}$ ex 15 relinquunt 2 $\frac{1}{2}$) Dico iterum 2 $\frac{1}{2}$ aurei, dant 10 vlnas, quot dant 100 aurei? & reperio 400 vlnas: atque tot vlnas emere debet vt 100 aureos lucretur.

Octauum. Eſt ciſterna duas habens eiuſdem magnitudinis fiſtulas, per quarum ſuperiorem impletur 6 per inferiorem euacuatur 8 horis. Quæro ſi vtraque continuo fluat, quanto tempore ciſterna impleatur. Quia 6 horis tota impletur, implebitur vna hora $\frac{1}{6}$ ciſternæ. Et quia 8 horis tota euacuatur, euacuabitur vna hora $\frac{1}{8}$ ciſternæ. Si ergo ſubtraham $\frac{1}{8}$ ex $\frac{1}{6}$ reſtabit pars ciſternæ, quæ vna hora impletur, nimirum $\frac{1}{24}$. Quare ſi vna hora impletur $\frac{1}{24}$ ciſternæ, implebitur tota horis 24.

Nonum. Eſt ciſterna tres habens fiſtulas æqualiter, & continuò fluentes, per primam impletur 4, per ſecundam 6, per tertiam 12 horis. Quæro ſi omnes ſimul fluerent, quanto tempore ciſterna impleretur? Prima vna hora implet $\frac{1}{4}$. Secunda $\frac{1}{6}$. Tertia $\frac{1}{12}$ ciſternæ: ergo omnes ſimul vna hora implent $\frac{1}{2}$ ciſternæ. Si dicam $\frac{1}{2}$ ciſternæ dat vnam horam, quid dat vna ciſterna? reperio 2 horas. Atque tanto tempore, ſi omnes fiſtulæ fluerent, ciſterna impleretur.

Decimum. Petrus dat Paulo 25 vlnas panni nigri pro 45 vlnis panni rubri, cuius quælibet vlna conſtat 35 cruciferis, quæro quid valeat vna vlna panni nigri Petri? Quia vna vlna panni rubri conſtat 35 cruciferis, conſtabunt omnes ſimul 1575 crucif. Sed & tantum valent omnes panni nigri: ergo vna valebit cruciferis 63.

vnde-

Vndecimum. Tres opifices abſoluunt aliquod opus. Primus ſolus laborans abſoluit illud 20; alter 30; ſi tertius accederet, abſoluerent id omnes ſimul 10 diebus. Quæro quanto tempore tertius ſolus abſolueret? Primus vno die abſoluit $\frac{1}{20}$; ſecundus $\frac{1}{30}$; vterque ſimul $\frac{1}{12}$ totius operis: qua ſubtracta ex $\frac{1}{10}$ portione, quam omnes ſimul vno die abſoluunt, reſtat $\frac{1}{60}$, portio tertij. Ergo ſi tertius vno die abſoluit $\frac{1}{60}$ operis, abſoluet totum 60 diebus. Nam ſi dicam, primus 20 diebus abſoluit totum opus, quid vno die? Reperio $\frac{1}{20}$. Eodem modo ſecundum vno die reperio abſoluere $\frac{1}{30}$. Vterque ergo vno die abſoluit $\frac{1}{12}$ operis. Et cum omnes id abſoluant 10 diebus, abſoluent vno die $\frac{1}{10}$. Subtracta ergo $\frac{1}{12}$ ex $\frac{1}{10}$, reſtat $\frac{1}{60}$, id quod tertius vno die abſoluit. Si ergo tertius vno die abſoluit $\frac{1}{60}$ operis, abſoluet totum 60 diebus.

Aliter. Quoniam primus abſoluit opus 20 diebus, abſoluet 10 diebus dimidium operis, hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Alter, quia 30 diebus totum abſoluit, abſoluet 10 diebus $\frac{1}{3}$ operis: vterque ergo 10 diebus abſoluet $\frac{5}{6}$ operis: Ergo tertius 10 diebus abſoluet $\frac{1}{6}$ operis. Ideoq; totum 60 diebus.

Duodecimum. Duo tabellarij è diuerſis ciuitatibus 240 milliaribus diſtantibus eodem die exeunt. Primus quolibet die conficit 7. Alter 5 milliaria: quæro quoto die conuenturi ſint? Vterq; ſimul conficiunt 12 milliaria. Si ergo dicam 12 milliaria dant 1 diem, quid dant 240 milliaria? Reperio 20 dies: conuenient ergo die vigeſimo.

Decimum tertium. Eſt moletrina três habens molas. Prima 12 horis molit 10 modios, altera 10 ho-

ris 8, tertia 6 horis, itidem 8 modios: quæro quot horis omnes molæ 30 modios molere poſſint? Prima vna hora molit $\frac{5}{6}$; altera $\frac{4}{5}$: tertia $\frac{4}{3}$: ergo omnes $2\frac{67}{90}$ Iam dico $2\frac{67}{90}$ modij requirunt 1 H, quid requirunt 30 modij? & inuenio $10\frac{10}{98}$ horas.

Decimum quartum. Eſt turris, cuius $\frac{1}{4}$ ſub terra latet, $\frac{1}{3}$ aquis immerſa eſt, ſupra aquam eminent pedes 150. Quæro quot pedum ſit turris, quot item terra, & aqua occultentur? $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$ faciunt $\frac{7}{12}$: ergo $\frac{7}{12}$ in terra & aqua ſunt, $\frac{5}{12}$ ſupra aquam eminent. Si igitur (abiectis denominatoribus) dicam. 5 | 150 | 7, reperio 210, qui cum 150 faciunt 360 pedes, cuius $\frac{1}{4}$ ſunt 90: $\frac{1}{3}$ ſunt 120: ergo 90 pedes in terra ſunt, 120 aquis immerguntur, & tota turris eſt 360 pedum.

Decimum quintum. Quidam mercator emit 100 vlnas panni 80 aureis, vult autem 230 vlnis lucrari 40 aureos. Quæro quanti vnam vlnam vendere debeat? Dico. 100 vl. | 80 au. | 230 vl. & reperio 184 au. Addo 40 au. vt fiant 224 aurei, dicoque 230 vl. | 224 au. | 1 vl. & inuenio vnam vlnam vendendam eſſe $58\frac{10}{23}$ cruciferis. Reſolui enim 224 aureos in cruciferos, & reperi 13440, quibus per 23. diuiſis, prouenerunt $28\frac{10}{23}$ cruciferi.

Decimum ſextum. Quidam vult mutuos accipere 10 aureos, ea lege, vt ſibi æquali numero dentur triarij, cruciferi & oboli. Quæro quot accipere debeat? Decem aurei faciunt triarios 200, cruciferos 600, obolos 4200: ergo vnus triarius eſt $\frac{1}{200}$, vnus crucifer $\frac{1}{600}$ vnus obolus $\frac{1}{4200}$ decem aureorũ: omnes ergo ſunt

$\frac{22}{4200}$

$\frac{29}{4200}$ decem aureorum. Si igitur 4200 per 29 diuidantur, prouenient 144 $\frac{24}{29}$; atque tot triarios, tot cruciferos, & tot obolos accipere debet. Faciunt enim 144 $\frac{24}{29}$ cruciferi, 48 $\frac{8}{29}$ triarios; & 144 $\frac{24}{29}$ oboli faciunt 6 $\frac{26}{29}$ triarios: ſed 144 $\frac{24}{29}$, 48 $\frac{8}{29}$, & 6 $\frac{26}{29}$ faciunt 200 triarios, hoc eſt, 10 aureos.

DE REGVLA RECIPROCA ſimplici.

Regula reciproca ſimplex eſt, quando termini homogenei ſeu primus, & tertius permutantur: quando autem permutandi ſint, ex ipſa quæſtione iudicandum eſt. Permutatione facta operatio fit, vt in ſimplici directa.

Primum exemplum. Cum modius tritici venditur 3 aureis, fit panis piſtorius 12 vnciarum: quæro quot vnciarum eſſe debeat, ſi modius vendatur 4 aureis? Sic quidem ſtat exemplum. 3 au. | 12 vnc. | 4 au. Sed permutatis terminis homogeneis notis ſic. 4 au. | 12 vnc. | 3 au. Facta operatione proueniunt vnciæ 9. Quod autem termini ſint permutandi, ratio hæc eſt. Quia ſi non permutarentur, prouenirent 16 vnciæ, quod fieri non poteſt: ſiquidem certum eſt, quo carius frumentum venditur, hoc minorem fieri debere panem. Ergo ſi panis, cum modius frumenti venditur 3 aureis, ſit vnciarum 12, debet neceſſario, cum venditur 4 aureis, pauciorum eſſe vnciarum: quod vt fiat regula Reciproca vtendum eſt. Vnde fit, vt in collocatione permutentur termni homogenei, hoc modo. 4 au. | 12 vnc. | 3 au. vt proueniant 9 vnciæ.

Secundum exemplum. Opifices 12 abſoluunt opus aliquod 20 diebus; quot diebus opus habent 30 opifices? Exemplum reciprocè ſic habet. 30 op. | 20 D. | 12 op. operatione abſoluta reperiuntur dies 8. Quod autem termini ſint permutandi inde conſtat; quia 30 opifices citius ſe expediunt quam 20.

Tertium. Sex fiſtulæ ciſternam implent 18 horis, quot horis opus habent 4 fiſtulæ? Certum eſt quod pluribus, plures enim fiſtulæ citius ciſternam implent, quam pauciores. Idcirco reciprocè ſic ſtat exemplum 4 fiſt. | 18 H. | 6. fiſt. facta operatione, reperio 27 horas.

Quartum. Nuncius ſi quotidie 12 milliaria conficiat, peruenit Romam 11 diebus; quæro quot diebus eò peruenturus ſit, ſi quotidie conficiat milliaria 9? Certum eſt, quod quo pauciora milliaria conficit, hoc tardius Romam peruenturus ſit. Igitur exemplum reciprocè ſic habet. 9. Mil. | 11 D. | 12 Mil. operatione abſoluta reperio dies $14\frac{2}{3}$.

Quintum. Quando pannus latus eſt 9 palmos, opus habeo pro tunica $4\frac{1}{2}$ vlnis: quæro quando latus eſt 21 palmos, quot opus habeam vlnis? Certum eſt, quod paucioribus. Vt ergo pauciores inueniam, reciprocè pono exemplum. 12 pal. | $4\frac{1}{4}$ vl. | 9 pal. facta operatione, inuenio $3\frac{3}{8}$ vlnas.

DE REGVLA COMPOSITA directa.

Directa compoſita plures quam tres terminos notos exigit, nimirum 5, 7, aut etiam plures. Reducuntur autem

autem plures illi termini ad tres, ſi aut cognati termini in ſe ſigillatim ducantur, aut regula proportionum inſtituatur. Sed rem exempla declarabunt.

Primum. 12 mercatores 1000 aureis lucrantur 800 aureos, quæro quantum 18 lucrentur 1900? Hic noti numeri quinque ad tres reducendi ſunt, hoc eſt, cognati primus & ſecundus; Item quartus, & quintus in ſe ducendi, obtinebuntq; producta locum primum, & tertiũ, hoc modo 12000 | 800 | 34200, facta operatione reperies aureos 2280, quos 18 mercatores, 1900 aureis lucrãtur. Poſſumus & eoſdẽ quinq; terminos ad tres per regulam proportionum reducere, ſi dicamus. 12 Merc. | 800 au. | 18 Merc. reperimus enim 1200: aut ſi dicamus 1000 | 800 | 1900, reperimus enim, 1520. Vt quæſtio in his tribus terminis. 1000 | 1200 | 1900; aut in his 12 | 1520 | 18, conſiſtat. Siquidem vtrobique per operationem eruitur hic numerus 2280.

Secundum. 20 plauſtra vini aduecta per 18 milliaria, conſumunt 100 aureos, quantum conſumunt 48 plauſtra, aduecta per 30 milliaria? Ductam 20 in 18; quam 48 in 30, & ſtabit exemplum in his terminis 360 | 100 | 1440. Facta operatione prouenient 400 aurei, quot 48 plauſtra, per 30 milliaria aduecta, conſumunt.

Tertium. 6 Mercatores, 200 aureis, 8 menſibus lucrantur 80 aureos; quantum lucrantur 16 mercatores, 600 aureis, 20 menſibus? Duc tam pecunias, quam menſes in ſuos mercatores ſigillatim, hoc eſt, duc in ſe tam 6.200.8. quam 16.600.20, ſtabitque exemplum in his terminis 9600 | 80 | 192000: facta operatione reperies 1600 aureos, quos 16 mercatores 600 aureis 20 menſibus lucrantur.

Quartum. $7\frac{1}{4}$ aurei, $3\frac{1}{2}$ diebus, lucrantur $19\frac{1}{2}$ aureos, quid lucrantur $23\frac{3}{4}$ aurei, $9\frac{1}{2}$ diebus? Ductis tam $7\frac{1}{4}$ in $3\frac{1}{2}$; quam $23\frac{3}{4}$ in $9\frac{1}{2}$, proueniunt $\frac{203}{8}$, & $\frac{1805}{8}$, reſolutoque hoc numero $19\frac{1}{2}$, & diuiſore, qui eſt primus terminus, inuerſo, ſtabit ſic exemplũ $\frac{8}{203}$ | $\frac{39}{2}$ | $\frac{1805}{8}$: ductis igitur tam denominatoribus, quam numeratoribus in ſe, producuntur $\frac{563160}{3248}$, & facta diuiſione, aurei 172, reſtant 1256, quibus in 60 ductis (quod vnus aureus 60 cruciferos habeat) productoque per 3248 diuiſo, proueniunt 23 cruciferi, reſtant 656, quibus rurſus in 7 ductis (quod vnus crucifer 7 habeat obolos) & producto per 3248 diuiſo proueniunt $1\frac{2}{29}$ oboli.

DE RECIPROCA COMpoſita.

Reciproca compoſita pluribus etiam quam tribus terminis notis conſtat; qui autem termini tranſponendi ſint, tum ex dictis de Reciproca ſimplici conſtat, tum exempla docebunt.

Primum exemplum. Quatuor Sartores conficiunt 100 tunicas 24 diebus, quot diebus opus habent 12 ſartores pro 350 tunicis? Sic quidem habet exemplum. 4 Sart. | 100 tu. | 24 D. | 12 Sart. | 350 tu. Sed quia 12 Sartores citius ſe expediunt, quam 4, permutandi ſunt ſartores, hoc modo 12 Sart. | 100 | 24 D. | 4. ſart. | 350 tu. Ductis ergo tam 12 in 100; quam 4 in 350, producuntur 1200, & 1400, ſtabitque exemplum in tribus terminis hoc modo, 1200 | 24 D. | 1400, operatione abſoluta proueniunt dies 28.

Secun-

Secundum. Si 12 modij ſrumenti emantur 36 aureis fit panis piſtorius 8 vnciarum; quæro ſi 14 modij emantur 48 aureis, quot vnciarum panis eſſe debeat? Sic quidem ſtat exemplum. 12 Mod. | 36 au. | 8 vnc. | | 14 Mod. 48 au. Verum cum ductis 14 in 48, plus producatur, quam ductis 12 in 36, fit vt aurei ſint permutandi hoc modo, 12. Mod. | 48 au. | 8 vnc. | 14 Mod. | 3 au. Quo facto ductis tam 14 in 36; quam 12 in 15 producuntur 504, & 576. ſtabitque exemplum ob tres terminos reductum, hoc modo, 576 | 8 | 504; facta operatione proueniunt 7 vnciæ. Eadem quæſtio ſic ſolui poteſt. Dico primo. 36 aurei dant 12 modios; quot dant 48 aurei? & inuenio 16 modios. Rurſus dico. 16 modij dant 8 vncias; quot dant 14? & reperio 7, vt prius.

Tertium exemplum. Quatuor equi vehunt plauſtrum vini 250 vrnarum per 20 milliaria 8 diebus: quęro quot diebus 6 equi vehant plauſtrum 350 vrnarum per 2 milliaria. Sic quidem ſtat exemplum 4 eq. | 250 vr | 20 mill. | 8 D. | 6 eq. | 350 vr. | 25 mill. | ſed quia 6 equi citius ſe expediunt, quam 4, ſtabit euerſè hoc modo 6 eq. | 250 vr. | 20 mill. | 8 D. | 4 eq. | 350 vr. | 25 mill. | ductis iam tam 6. 250, 20; quam 4. 350. 25 in ſe ſigillatim, producantur 30000, & 35000. Quare exemplum in tribus terminis ſic habet, 30000 | 8 | 35000, facta operatione reperies dies $9\frac{1}{3}$, ſiue 9 dies, 8 horas.

ARTICVLVS II.

De regula Conſortij.

C 5 Fit

Fit interdum, vt plures mercatores ſocietatem ineant,& vt aut de lucro, quod conſequuntur, inter ipſos diuidendo; aut, ſi de lucro conuentum ſit, quid quilibet in ſortem conferre debeat; aut denique, ſi de vtroque horum conſtet, de tempore tamen, quo pecuniam expendendam in ſorte eſſe neceſſe ſit, quæſtio oriatur. Colligantur primo pecuniæ ſingulorum in ſortem datæ, aut tempora, in vnam ſummam. Quod ſi tempora pecunijs intercurrant,ducatur quælibet pecunia in ſuum tempus, deinde fiat collectio. Collectione facta,ſtatuatur primo loco ſumma collecta ; ſecundo lucrum, vel damnum: tertio ſingulorum pecuniæ in ſortem datæ,aut producta ex pecunijs & temporibus facta.

Primum exemplum. Tres mercatores lucrati ſunt 300 aureos. Primus expoſuit 800 au. Secundus 672 Tertius 448 quæro quantum quilibet ex lucro 300 aureorum capiat? Addantur in vnam ſummam pecuniæ expoſitæ, nempe 800, 672, 448. Quo facto, dico, ſumma pecunię expoſitę 1920 dat 300 aureorũ lucrum, quid dant ſingulorum pecuniæ expoſitæ? & reperio pro primo 125 au. pro ſecundo 105, pro tertio 70.

1920	300	800 672, 448

Secundum. Tres mercatores in negotiatione perdiderunt 100 aureos. Contulerunt autem omnes æqualem pecuniæ ſummam; ſed primi in ſorte fuit menſibus 20; ſecundi 16; tertij 14: quæro quantum quilibet damnum pati debeat? Menſium ſumma eſt 50. Ter ergo regula proportionum vſurpanda eſt, hoc modo: ſed quia, cuius pecu-

50	100	20 16: 14

nia longiore tempore in ſortę fuit,minus damni pati debet,

bet, inuerto primi, & ſecundi menſes, hoc modo, reperioq; operatione abſoluta, damnum primi eſſe 28; ſecundi 325; tertij 40 aureorum.

50	100	14
		16, &
		20

Tertium. Tres lucrati ſunt 1925 aureos: primus contulit in ſortem 400 au. per 20 menſes: ſecundus 500 per menſes 25: tertius 600 per 30. menſes. Quæro quantum quilibet ex lucro capiat? Duco menſes in pecunias expoſitas, & produco hos numeros 8000. 12500. 18000; quorum ſumma eſt 38500. Iam vtor regula proportionum ter, hoc modo.

38500	1925	8000.
		12500.
		18000.

Abſoluta operatione, reperio primum ex lucro capere 400 au. ſecundum 625; tertium 900. Summa omnium cum ſit 1925, bene operati ſumus.

Sed placet hoc ipſum exemplum aliter proponere. Tres mercatores lucrati ſunt 1925 aureos. Primus per 20 menſes expoſuit 400: ſecundus expoſuit 500: tertius 600. Accepit autem in diſtributione primus 400; ſecundus 625; tertius 900: quæro quot menſibus pecuniæ ſecundi, & tertij in ſorte fuerint? Pecunia primi in ſortem data ducta in ſuum tempus, facit 8000. Colloco ergo primo loco lucrum primi: ſecundo 8000: tertio lucra ſecundi, & tertij, hoc modo. 400 | 8000 | 625. 900. operatione facta, proueniunt 12500, & 18000; quibus per pecunias expoſitas ſecundi, & tertij diuiſis, proueniunt 25, & 30 tempora ſecundi & tertij.

Quar-

Quartum. Tres lucrati ſunt 1500 aureos. Primus in ſortem contulit 2400 per 12 menſes: ſecundus contulit 1600: tertius in ſorte habuit ſuas pecunias 10 menſibus. Accepit autem primus ex lucro 600; ſecundus 500; tertius 400 au. Quæro quandiu pecunia ſecundi in ſorte fuerit, & quid tertius contulerit? Duco pecuniam primi in ſortem datam in ſuum tempus & produco 28800. Iam colloco primo loco lucrum primi, ſecundo 28800, tertio lucra ſecundi,& tertij hoc modo. 600 | 28800 | $\frac{500}{400}$. Facta operatione reperio 24000,& 19200. Diuiſis igitur 24000 per pecuniam expoſitam ſecundi 1600, proueniunt 15; atque tot menſibus pecunia ſecundi in ſorte fuit. Diuiſis verò 19200 per 10 tempus tertij, proueniunt 1920, pecunia in ſortem data tertij.

Articvlvs III.

De regvla alligationis.

Miſcet,& alligat hæc regula varia inter ſe precia, quorum duo, aut plura ſunt ſtatuta,& determinata, vnum arbitrarium,ſeu voluntarium. Debet autem ſemper precium arbitrarium eſſe quaſi medium inter ſtatuta, non quidem exacte;ſed ita, vt ſi duo tantum ſint ſtatuta, vnum maius,alterum minus ſit arbitrario: ſi plura, ſaltem vnum ſit maius, aut vnum minus arbitrario.

Secundo,in preciorũ mixtura ponendũ eſt arbitrariũ ſiniſtrorsũ:in medio ſtatuta; dextrorsũ differẽtię arbitrarij,& ſtatutorũ,alternè tñ,h.e.differẽtia arbitrarij,& maio-

maioris ſtatuti ponenda eſt ad latus minoris ſtatuti; & contra differentia arbitrarij, & minoris ſtatuti, ad latus maioris ſtatuti. Si fuerint plura ſtatuta maiora arbitrario, & plura minora, perinde eſt quæcunque maiora cum quibuſcunque minoribus permiſceas; poſſunt enim mixturæ varijs fieri modis. Si tantum vnum ſit ſtatutum minus arbitrario, reliqua maiora, ponēda eſt differentia arbitrarij, & minoris ſtatuti ad omnium maiorum ſtatutorum latera; & omnes omnium maiorum ſtatutorum differentiæ ad latus minoris ſtatuti. Idem intellige ſi vnum tantum ſtatutum ſit minus arbitrario, reliqua minora.

Tertio; in operatione ponatur primo loco ſumma differentiarum: ſecundo numerus precij ſtatuti. Tertio ſingulæ differentiæ, & toties inſtituatur regula proportionum, quot ſunt differentiæ. Sed exemplis præcepta illuſtremus.

Primum. Sunt duo genera vini, menſura vnius vænit 20, alterius 12 cruciferis; cupio ex vtroque vnam menſurā emere, quæ conſtet 17 cruciferis; quæro quātum ex quolibet accipere debeam? Pono differentiam 17 & 20 ad latus dextrum 12: differentiam 17 & 12 ad latus 20 hoc modo: hic precium arbitrarium ſunt 17, ſtatuta 20, & 12, differentiæ 5 & 3. Dico ergo ſumma differentiarum, nimirum 8 dat 1 menſuram precij arbitrarij (nam vnam tantum emere volo ſi enim plures vellem. V.G. 20, ponerem loco ſecundo 20) quid dant differentiæ 5 & 3? operatione abſoluta reperio ex menſura. 20 cruciferorum $\frac{5}{8}$, ex menſura vero 12 cruciferorum $\frac{3}{8}$ vnius menſuræ, accipiendas. Si vellem emere 20, ſic

17	20	5
	12	$\frac{3}{8}$

ſic exemplum ſtaret. 8 | 20 | $\frac{5}{3}$. reperiremque ex vino 20 cruciferorum 1 $\frac{1}{2}$; ex vino vero 12 crucif, 7. $\frac{1}{2}$ menſuras accipiendas.

Eodem modo detegitur furtum aurifabri regis Hieronis, vt Vitruuius habet lib. 9. cap. 3. Cum enim Hiero Dijs auream coronam vouiſſet, & aurifaber ſublata portione auri, tantundem argenti ſubſtituiſſet, detexit Archimedes hac arte furtum. Accepit duas maſſas, vnam puri auri, alteram puri argenti, eiuſdem cum corona ponderis, miſitque & coronam, & vtramque maſſam in vas aqua plenum, quantumque quælibet aquæ eiecerit notauit. Ponamus maſſam auri eieciſſe 6 ovncias aquæ coronam 65, maſſam argenti 90. Hic aqua, quam corona eiecit, eſt precium arbitrarium; quam maſſæ auri & argenti, ſtatuta, vt hic apparet. 65 | $\frac{90}{60}$ | $\frac{5}{25}$. Iam ſi corona ponatur 100 librarum fuiſſe, Dico. Summa differentiarum 30, dat 100 libras, quid dant ſingulæ differentiæ? Inuenioque 16 $\frac{2}{3}$, & 83 $\frac{1}{3}$ Ergo 16 $\frac{2}{3}$ libras auri ſublegit, totidemque argenti ſubſtituit aurifaber.

Secundum exemplum. Sunt tria genera panni; primi generis vlna venditur 24, ſecundi 12, tertij 8 cruciferis. Cupio ex omnibus accipere vlnam quæ conſtet 18 cruciferis; quæro quantum ex quolibet genere accipere debeam? Hic arbitrarium precium, ſunt 18 cruciferi, ſtatuta 24. 12 & 8 crucif. Differentia 18 & 24, quæ eſt 6 ponitur, & ad 12, & ad 8; differentia vero tam 18 & 12, quam 18 & 8 ponitur ad 24, vt hic vides. Summa differentiarum eſt

18	24	6.	10
	12	6.	
	8	6.	

18. Dico ergo 28 dant 1 vlnam, quid dant differentiæ

16. 6.

16.6.6. & inuenio ex vlna 28 cruciferorum $\frac{8}{14}$, ex vlnis 12, & 8 cruciferorum accipiendas eſſe $\frac{3}{14}$ vnius vlnæ.

Tertium. Libra croci venit 34, libra piperis 30, libra cinnamomi 18, libra cingiberis 16 cruciferis. Cupio ex omnibus 12 libras emere pro 4 aureis; quæro quantum ex quolibet genere accipere debeam? Primo indagandum eſt precium arbitrarium, quod ita fit. Diuido 4 aureos, ſiue 240 cruciferos per 12, & reperio 20 cruciferos, precium arbitrarium, Sic ergo forma habet.

20	34	4
	30	2
	18	10
	16	14

Alligaui 34, & 16 cum 20; deinde 30 & 18: Quo facto dixi. Summa differentiarum 30 dat 12 libras, quid dant ſingulæ differentiæ? Reperiq; pro primo genere aromatum 1 $\frac{3}{5}$, pro ſecundo $\frac{4}{5}$, pro tertio 4, pro quarto 5 $\frac{3}{5}$ lib. quæ cum ſimul faciant 12, bene operati ſumus.

Quando plura ſunt precia ſtatuta, vt in hac tertia quæſtione, poſſunt alligationes fieri pluribus modis; poſſum enim etiam 34 cum 18; & 30 cum 16, ligare, vt hic apparet. Ex qua alligatione ſequitur, ex primo genere aromatum accipiendas eſſe $\frac{4}{5}$, ex ſecundo 1 $\frac{2}{5}$, ex tertio 5 $\frac{3}{5}$, ex quarto 4 libras.

20	34	2
	30	4
	18	14
	16	10

ANNOTATIO.

Quod fit ex precio arbitrario in ſummam differentiarum, æquale eſt illis, quæ fiunt ex omnibus precijs ſtatutis in omnes differentias collaterales.

Item quod fit ex precio arbitrario in numerum precij arbitrarij; æquale eſt illis, quæ fiunt ex precijs ſtatutis in partes

tes per regulam inuentas. Vt in tertio exemplo, quod fit ex 20 precio arbitrario in 12 numerum precij arbitrarij, æquale eſt illis quæ fiunt ex 34 in 1 $\frac{3}{5}$, & ex 30 in $\frac{4}{5}$, & ex 18 in 4, & ex 16 in 5 $\frac{3}{5}$ &c.

Articvlvs IV.

De regvla po-ſitionis.

Hæc regula, quæ etiam regula Falſi dicitur, duplex eſt, ſimplicis, & duplicis poſitionis. Harum regularum hoc eſt diſcrimen, quod quidquid per primam ſolui poteſt, poſſit & per ſecundam; non contra. Prima regula tunc tantum vſui eſſe poteſt, quando eſt, vt numerus per poſitionem inuentus, ad ipſam poſitionem; ita numerus notus ad inueniendum. Simplicis poſitionis quæſtiones ſoluturus, pone pro numero inueniendo, numerum quemcunq;, cum eoq; progredere iuxta quæſtionis ſententiam, non ſecus, ac ſi ille eſſet numerus quæſitus. Ac tandem vtere regula proportionum. Primo loco ponendo, quod inuentum eſt ex theſi. Secundò, numerum quem pro quæſito poſuiſti. Tertiò, illud quod in quæſtione notum ponitur.

Primum exemplum. Tres inter ſe diuidunt 126 aureos, ea lege, vt ſecundus duplo, tertius triplo plus habeat primo. Pono primum habere 4; habet ergo ſecundus 8; tertius 12: ergo omnes 24; deberent autem habere 126. Dico igitur 24. dant 4; quid dant 126, & reperio 21 pecuniam primi, habet ergo ſecundus 42; tertius 63; qui numeri cum coniuncti faciant 126, bene operati ſumus.

Secun-

Secundum. Cuidam quatuor debitores debent 1000 aureos. Si primus quotannis perſoluat 18; ſecundus 16; tertius 10; quartus 6: quæro quanto tempore totum debitum ſint perſoluturi, & quantum quiſque debeat? Pono 6 annis, quibus dat primus 108; ſecundus 96; tertius 60; quartus 36; qui numeri coniuncti faciunt 300, deberent autem facere 1000. Dico ergo 300 dant 6; quid dant 1000, & reperio 20: Ergo annis 20 totum debitum perſoluetur: quibus dat primus 360; ſecundus 320; tertius 200, quartus 120: qui numeri cum ſimul faciant 1000, bene operati ſumus.

Tertium. Quidam rogatus, quot haberet pecunias, reſpondit Si adhuc haberem tot, quot habeo, & præterea $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ meæ pecuniæ, haberem 85 aureos.

Quæro quantum habeat? Ponatur habere 6; quibus ſi adhuc tot addam; Item $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, ſcilicet 3, & 2, conflabo 17. Dico ergo 17 dant 6, quid dant 85, & reperio 30 aureos; quibus ſi addantur 30, & dimidium, nempe 15, & $\frac{1}{3}$ ſcilicet 10, conflabuntur 85.

Quartum. Hæreditatis meæ $\frac{2}{3}$ pro cenſu annuo expoſui; $\frac{1}{4}$ ludendo amiſi, retineo adhuc 115 aureos; quæro quanta fuit hæreditas? Pono fuiſſe 12 au. cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 8; $\frac{1}{4}$ eſt 3: ſumma 11; quibus ex 12 ſubtractis reſtat 1; deberent autem 115 reſtare. Dico ergo 1 dat 115; quid dant 12? & reperio 1380 aureos. Cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 920; $\frac{1}{4}$ eſt 345, quæ quia cum 115 faciunt 1380, bene operati ſumus.

De duplici poſitione.

Regula duplicis poſitionis ſic habet. Pone pro nu-

mero inueniendo numerum quemcunque, cumque illo procede iuxta quæſtionis ſententiam; qui ſi quæſtioni ſatis fecerit, erit ille numerus quæſitus. Si non ſatis fecerit, pone errorem infra poſitionem cum litera P, vel M, prout per exceſſum, vel defectum erratum fuerit.

Secundo, pone alium numerum, cum quo, vt cum priore, procede, errore cum litera P, vel M, infra poſitionem collocato.

Tertiò, ſi vterq; error habuerit P, vel M, (quæ literæ ſignificant plus, & minus) ſubtrahe minorem ex maiore, reſiduum erit diuiſor. Si alter habuerit P, alter M, adde errores, eritque vtriuſque ſumma diuiſor.

Quartò, duc per crucem primam poſitionem in errorem ſecundum; ſecundam in errorem primum; productum minus tolle ex maiore, ſi vterque error habuerit P, vel M: ſi vnus P, alter M, adde producta.

Quintò. Reſiduum, aut ſummam diuide per diuiſionem ante repertum, & erit, quod prouenit, numerus occultus, qui quæritur.

Primvm Exemplvm. Duo habent pecunias, ſi primus dat ſecundo 7 au. habet ſecundus triplo plus primo: ſi vero ſecundus dat primo 3, habet vterq; æqualem ſummam, quæro quantum quilibet habeat?

Pono pro pecunia primi numerum quecunque, dummodo maior ſit quam 7, vt ſecundo poſſit dare 7. Ponamus igitur primum habere 19 aureos, ex quibus ſi dederit ſecundo 7, retinebit ipſe 12, cuius triplum eſt 36, ex quo ſi tol-

19		21
29		35
4 M Error Primus	+ Diuiſor.	8 M. Error Secundus

las 7, reſtant 29, pecunia ſecundi. Si ſecundus det primo 3, retinebit ipſe 26, & habebit primus 22, qui numerus cum minor ſit numero 26, errauimus per defectum, hoc numero 4, qui eſt error primus. Ponatur ſecundo primus hababere 21 au. qui vbi ſecundo dederit 7, retinebit ipſe 14; ex cuius triplo 42, ſi tollo 7, reſtant 35, pecunia ſecundi. Qui ſi primo dederit 3, retinebit ipſe 32, & habebit primus 24; qui numerus cum ſit minor, quam 32, iterum per defectum hoc numero 8, erratum eſt. Subtrahe minorem errorem ex maiore, & reſtabit Diuiſor 4. Duc deinde per crucem, tam 8, ſecundum errorem in 19, primam poſitionem; quam 4, primum errorem in 21, ſecundam poſitionem, & produces 152, & 84. Subtractis 84 ex 152, reſtant 68, quibus per 4 diuiſis, proueniunt 17, pecunia primi. Rurſus ſi ducas, tam 8 in 29; quam 4 in 35, produces 232 & 140. Subtractiſq; 140 ex 232, & reſiduo 92 per 4 diuiſo, proueniunt 23, pecunia ſecundi. Nam ſi primus, qui habet 17, det ſecundo, qui habet 23, ſeptem, habebit ſecundus 30, primus 10. Si vero ſecundus dederit primo 3, habebit vterque 20: quæſtio ergo rectè ſoluta eſt.

60		80
180		160
120. M.		P. 80
	200	
	Diuiſor.	

Secundum. Diuidatur numerus 240 in duas partes, vt ſi minor ducatur in 7, maior in 3, producta fiãt æqualia. Ponatur minor 60; erit ergo maior 180. Si ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 420, & 540; erratum ergo eſt per defectum hoc numero 120.

Ponatur ſecundo minor 80; erit igitur maior 160: ſi ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 560, & 480; erratum igitur eſt per exceſſum, hoc numero 80. Summa errorum 200, eſt diuiſor. Si iam per crucem tam 120 in 80; quam 80 in 60 ducantur, o producentur 9600, & 4800; quorum ſumma 1440 per Diuiſorem 200 diuiſa, reddit 72, partem primam, & minorem; qua ex 240 ſubtracta, reſtat maior 168; nam tam 72 in 7; quam 168 in 3 ducta, producunt 504.

Annotatio I.

Gemma Friſius hanc regulam extendit ad radicum extractiones; verum cum in multis exemplis fallat, non ducimus operæ precium plura de illa dicere. Nam ſi proponatur talis quæſtio. Dentur duo numeri in dupla proportione, vt in ſe ducti procreent 98, ſuccedit regula Gemmæ; ſi vero talis proponatur: Dentur duo numeri, quorum exceſſus ſit 4, vt in ſe ducti producant 165, fallit. Cæterum ſimilium quæſtionum ſolutiones petantur ex art. 3. cap. 3. lib. 2.

Annotatio II.

Praxin Italicam, & alia Compendia in regulis hactenus traditis conſulto omiſi, quod vſu melius, quam regulis diſcantur: multitudine enim regularum obruimur, quæ vſu diſcimus, tenaciſsimè hærent. Quis n. non videt, ſi vel mediocriter in calculo ſit exercitatus, poſſe in regula proportionum pro magnis homogeneorum terminis, minores eiuſdem proportionis ſubſtitui? Vt pro 12 & 36, hos 1, 3: pro 225 & 1575, hos, 1, 7: Si enim talis proponatur quæſt. Aureis 225 emo 87 vrnas vini quantum emo aureis 1575? totidem vrnas inuenio, quot inuenirem, ſi dicerem, aureo 1, emo 87 vrnas, quot emo aureis 7? Vtrobique enim

enim inuenio vrnas 609, quod vtrobique homogeneorum terminorum ſeptupla ſit proportio.

CAPVT IV.

DE NVMERORVM proprietatibus.

In hoc cap. primò agam de numero abſolutè conſiderato. Secundò, de numero relato. Tertiò, de numero geometricas figuras repræſentante.

ARTICVLVS I.

DE NVMERO ABSOLVtè conſiderato.

Numeri abſolutè conſiderati, Primò diuiduntur in pares, & impares. Pares ſunt, quos binarius numerat; Impares, quos binarius non numerat.

Species parium duæ ſunt, Sunt enim, aut pariter pares; aut pariter impares. Pariter par eſt, quem numerus par per parem metitur, cuiuſmodi eſt 8. quem 2 per 4 metitur. Pariter impar eſt, quem par per imparem metitur, vt eſt numerus 10, quem 2 per 5 metitur.

Impariter impar non eſt ſpecies paris, ſed imparis, cuiuſmodi eſt numerus 15, quem impar per imparem metitur, vt 3 per 5.

Proprietates parium, & imparium ſunt, Prima. Par additus pari, facit parem, Secunda, Par additus impari, facit imparem. Tertia. Impar additus impari, facit parem. Quarta. Par ſubtractus à pari, relinquit parem.

Quinta. Par ſubtractus ab impari, relinquit imparem.
Sexta. Impar ſubtractus ab impari, relinquit parem.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3.5.7.11.13.&c.

Primi inter ſe ſunt, quos ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3 & 4,8 & 9,10 & 13 &c.

Numerus compoſitus eſt, quem aliquis numerus metitur; Cuiuſmodi ſunt 4.6.8.10,12.&c.

Compoſiti inter ſe ſunt, quos aliquis numerus, qui cõmunis eorum menſura dicitur, metitur.
Cuiuſmodi ſunt 4 & 8;6 & 12;4 & 10; 16 & 20 &c. duos priores metiuntur 2 & 4 duos ſequentes 2.3 & 6; duos tertios 2, Duos poſtremos 2,& 4.

Numerus perfectus eſt, qui ſuis partibus eſt æqualis, cuiuſmodi ſunt 6.28.496.

Abundans eſt, qui ſuis partibus eſt maior.

Diminutus, qui ſuis partibus eſt minor. Intelligo per partes, partes aliquotas; ſeu quotos illorum numerorum, per quos diuidi poſſunt: Vt 6 diuidi poteſt per 2 3 & 6, quorum quoti 3.2.1. faciunt 6. Et 28 diuidi poteſt per 2.4.7.14.28; quorum quoti 14.7.4.2.1. faciunt 28. Numerum 12 diuidunt 2. 3.4.6.12; quorum quoti 6.4.3.2.1. faciunt 16, plus quam 12. Numerum 10 diuidunt 2 & 5; quorum quoti 5 & 2 faciunt 7, minus quam 10. Vnde 6 & 28 ſunt numeri perfecti, 12 abundans, 10 diminutus.

Perfecti inueniuntur ex progreſſione geometrica duorum parium, vt ex 2 & 4. ex 4 & 8; ex 16 & 32; ex 64 & 128; ex 256 & 512; ex 1024 & 2048 &c. Si nimirum ex maiore tollatur vnitas, reſiduum ducatur

tur in minorem: ita ex 2 & 3 fiunt 6. Ex 4 & 7 fiunt 28. ex 16. & 31 fiunt 496. ex 64 & 127 fiunt 8128 &c.

ANNOTATIO.

Pares & impares inter abſolutos, non inter relatos repono, quod eorum definitiones abſoluta & abſolutorum ſint, non relata & relatorum.

ARTICVLVS II.

DE NVMERO RELATO.

Huc pertinent proportiones, proportionalitates, & medietates, ſiue progreſſiones, de quibus ſingulis compendio eſt agendum.

De Proportionibus.

Proportio triplex eſt, æqualitatis, maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Aequalitas eſt, quando æqualis numerus ad æqualem refertur, vt 4 ad 4.

Maioris inæqualitatis eſt, quando maior numerus ad minorem; Minoris, quando minor ad maiorem refertur. Vtriuſq; quinq; ſunt ſpecies. Prima maioris inæqualitatis dicitur Multiplex. Secũda ſuperparticularis. Tertia ſuperpartiens. Quarta Multiplex ſuperparticularis. Quinta Multiplex ſuperpartiens.

Multiplex eſt, quando maior minorem aliquoties cõtinet. Vt bis, ter, quater, decies, centies, &c. Cuiuſmodi cernitur inter 4 & 2; inter 9 & 3; inter 20 & 5; inter 100 & 10 &c. quarum prima dicitur dupla, ſecunda tripla, tertia quadrupla, quarta decupla, &c.

Superparticularis eſt, quando maior minorem ſemel conti-

continet, & inſuper vnam eius partem: cuiuſmodi proportio eſt inter 3 & 2: inter 4 & 3; inter 9 & 8. Prima dicitur ſeſquialtera; Secunda ſeſquitertia: Tertia ſeſquiquarta: Quarta ſeſquioctaua. Eſt proportio ſuperparticularis inter omnes numeros vnitate ſeſe excedentes, & inter eorum æquè multiplices. Vt inter 12 & 11: inter 36 & 33; inter 60, & 56, &c. Dicuntur 36, & 33, ipſorum 12 & 11 æquè multiplices, cum creentur ex ductu ipſorum 12, & 11, in 3: Similiter 60, & 56 fiunt ex 15 & 14, in 4. Superpatiens eſt, quando maior minorem ſemel, & inſuper aliquot eius partes continet: Cuiuſmodi proportio eſt inter omnes numeros interſe primos, modo eorum exceſſus ſit plus quam vnitas. Item inter eorum æquè multiplices: Cuiuſmodi eſt inter 7, & 5: inter 14 & 10: inter 27 & 17: inter 81 & 51. Prima, & ſecunda dicitur ſuperquintupartiens duas; Tertia & quarta ſuper ſeptemdecupartiens decimas &c.

Multiplex ſuperparticularis, compoſita ex multiplici, & ſuperparticulari eſt, quando maior minorem aliquoties, & inſuper vnam eius partem continet; Cuiuſmodi eſt inter 5 & 2: inter 19 & 6; inter 29 & 7: prima dicitur dupla ſeſquialtera: Secunda tripla ſeſquiſexta: Tertia quadrupla ſeſqui ſeptima.

Multiplex ſuperpartiens, ex multiplici, & ſuperpartiente compoſita eſt, qñ maior minorẽ aliquoties, & inſuper aliquot eius partes continet; cuiuſmodi eſt inter 34 & 7: inter 14 & 5, prima dicitur quadrupla ſuperſeptupartiens ſextas; ſecunda dupla ſuperquintupartiens quartas.

Proportio minoris inæqualitatis eſt, qñ minor cũ maiore comparatur. Eaſdem quas prior habet ſpecies; ſed præfigitur illis particula (Sub) vt ſubmultiplex, ſubſuper-

ſuperparticularis; ſubſuperpartiens, &c. Hinc inter 2 & 4 dicitur eſſe proportio ſubdupla; inter 2 & 3 ſubſeſquialtera; inter 3 & 12 ſubquadrupla &c.

ARTICVLVS III.

DE PROPORTIONVM Compoſitione.

Proportionum compoſitio fit per *Additionem, ſubtractionem, multiplicationem,* & *diuiſionem*, quam Cla. in fine lib. 9. Euclid. explic t. Cum enim addit proportionem proportioni, addit inter ſe denominatores proportionis. Vt ſi addendæ ſint dupla & tripla, fit quintupla, quod ex additione denominatorum 2 & 3, fiant 5. Si addenda ſit dupla ſeſquioctaua ad triplam ſeſquiquartam, fiet $5\frac{3}{8}$, ſcilicet quintupla ſuperoctupartiens tertias. Nam denominator duplæ ſeſquioctauæ eſt $2\frac{1}{8}$. triplæ ſeſquiquartæ $3\frac{1}{4}$, quæ inuicem additæ, faciunt $5\frac{3}{8}$.

Cum proportio proportioni ſubtrahitur, denominator minor ex maiore ſubtrahitur, vt ſi dupla ex ſextupla ſit ſubtrahenda, reſtat quadrupla: ſi ſeſquialtera ex tripla, reſtat ſeſquialtera: nam denominator ſeſquialteræ eſt $\frac{3}{2}$; triplæ 3, ſiue $\frac{6}{2}$: ſubtractis autem $\frac{3}{2}$ ex $\frac{6}{2}$, reſtant $\frac{3}{2}$, ſiue $1\frac{1}{2}$. In multiplicatione proportionis, in ſe ducuntur denominatores proportionis, vt ſi tripla ſit ducenda in quadruplam, gignetur duodecupla. Si tripla ſuperſeptupartiens tertias in duplam ſeſquiquartam, hoc eſt, $3\frac{3}{7}$, in $2\frac{1}{4}$, producetur $7\frac{5}{7}$, hoc eſt, ſeptupla ſuperſeptupartiens quintas.

Eodem modo in diuiſione diuiditur maior proportionis denominator per minorem. Vt ſi diuidenda ſit decupla per duplam, prouenietquintupla; ſi quadrupla ſuperquadrupartiens tertias per ſeſquialteram, hoc eſt, $4\frac{3}{4}$ per $1\frac{1}{2}$, prouenietꞏtripla ſeſquiſexta, hoc eſt $\frac{1}{6}$. Vides ergo modo proportionum Multiplicationem, & Diuiſionem fieri, quo numerorum fractorum.

Articvlvs IV.

De Analogia, ſiue proportionalitate.

Authores plerique *Analogiam* vocant medietatem. Numerantur analogiæ plures; ſed ex illis tres ſunt præcipuæ, *Arithmetica*, *Geometrica*, & *Muſica*, quas etiam progreſſiones appellamus. De ſingulis pauca dicenda ſunt.

De progreſſione Arithmetica.

Arithmetica progreſsio eſt ſeries numerorum, in qua tres, aut plures numeri per eandem differentiam progrediuntur, vt hic videre eſt.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.
16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. &c.
2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26.
28. 30. 32. 34. 36. 38. 40. 42. 44. &c.
1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25.
27. 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55.
60. 65. 70. 75. 80. 85. 90. 95. 100. &c.

Pri-

Prima progreditur per *vnitatem*, ſemper enim ſequens numerus præcedentem vnitate ſuperat. *Secunda*, & *tertia* per 2. *Quarta* per 5. Omnium ſumma facillime habetur hoc modo. Adduntur primus & vltimus termini; ſumma per ſemiſſem numeri terminorum vel ſemiſſis ſummæ per numerum terminorum multiplicatur, & habetur ſumma omnium. In prima progreſſione primus & vltimus termini faciunt 25, quæ in 12 ſemiſſem numeri terminorum ducta faciunt 300, ſummam omnium. In ſecunda progreſſione ſumma primi, & vltimi termini 46, in 11, ſemiſſem numeri terminorum ducta progignit 506, omnium ſummam. Eodem modo reperies ſummam tertiæ 484; quartæ 1050.

Habetur quoque ſumma omnium imparium ab vnitate incipientium cuiuſmodi eſt progreſſio tertia, ſi numerus terminorum in ſe ducatur: nam ſi 22, numerus terminorum tertiæ progreſsionis in ſe ducatur, procreantur 484, vt prius. Parium verò à binario incipientium ſumma habetur, ſi numerus terminorum in numerum vnitate maiorem numero terminorum ducatur. Si enim in ſecunda progreſſione 22, qui eſt numerus terminorum, ducatur in 23, procreabuntur 560, vt prius.

REGVLAE PROGRESSIONIS Arithmeticæ.

Prima. Si numerus terminorum vnitate mutilatus, ducatur in differentiã terminorũ, productoq; addatur terminus primus, prodibit vltimus. Vt ſi in progreſſion

quar

quarta, habente 20 terminos, 19 in 5 ducantur, & producto terminus primus addatur, conflabuntur 100, terminus vltimus.

Secunda. Primus terminus habetur, ſi ſublata vnitate è numero terminorum, reliquum in differentiam ducatur, & productum ab vltimo termino tollatur. Vt in hac progreſsione 10. 20. 30. 40. 50. 60 habente ſex terminos, ſi vnitas ex 6 tollatur, reliquum in differentiam 10 ducatur, producentur 50, quibus ex vltimo termino 60 deductis, reſtant 10. terminus primus.

Tertia, ſi primus terminus ab vltimo tollatur, reliquum per numerum vnitate minorem numero terminorum diuidatur, prodit progreſſionis differentia. Vt in progreſſione proxima, ſi tollam 10 ex 60, reliquum 50 diuidam per 5 numerum vnitate minorem numero terminorum, proueniunt 10, differentia progreſſionis.

Quarta, ſi ſublato termino primo ab vltimo, reliquũ per differentiam diuidatur, & quoto vnitas addatur, prouenit numerus terminorum. Vt ſi in eadem progreſſione 10 tollam ex 60, reliquum per differentiam 10 diuidam, & quoto vnitatem addam, exurgent 6, numerus terminorum.

Quinta, ſi ab vltimo termino primus tollatur, reſiduum erit ſumma differentiarum.

PROPRIETATES PROGRESSIONIS Arithmeticæ.

Prima. Datis tribus quibuſcunque progreſſionis terminis continuis, erit duplum medij, æquale aggrega-

gregato extremorum. Vt in his tribus 7.8.9, eſt tam duplum medij, quam aggregatum extremorum 16.

Secunda. Datis quatuor continuis, erit ſumma mediorum æqualis ſummæ extremorum.

Tertia. Duplum cuiuſcumque eſt æquale aggregato duorum æqualiter hinc inde diſtantium. Vt duplum ipſius 8, eſt æquale aggregato ex 1 & 15 facto; æqualiter autem, 1 & 15 ab 8 hinc inde diſtant in prima progreſſione.

DE PROGRESSIONE Geometrica.

Geometrica progreſſio eſt ſeries numerorum eadem ſe proportione ſuperantium, cuiuſmodi ſunt ſequentes.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096. 8192. &c.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. 59049. 177147. 531441. &c.

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. 16384. 65536. 262144. 1048576. &c.

Prima eſt *dupla*, ſecunda *tripla*, tertia *quadrupla*. Summa omnium habetur; ſi primus terminus tollatur ab vltimo, reſiduum diuidatur per numerum vnitate minorem denominatore proportionis (eſt autem denominator duplæ 2: triplæ 3; quadruplæ 4; &c.) & quoto addatur vltimus terminus. Ita inuenies ſummam omnium primæ progreſſionis eſſe 16383; ſecundæ 797161; tertiæ 1398101.

Geometrica progreſſio duplex eſt, continua, & diſcreta. *Continua* eſt, quando omnes termini præter primum,

mum,& vltimum, ſunt antecedentes & conſequentes. Nam, vt 4 ſe habent ad 8; ita 8 ſe habent ad 16;& vt 16 ſunt ad 32 ita 32 ad 64;& ita 64 ad 128,&c.Vides ergo in hac dupla progreſsione 4. 8. 16.32.64.128 , omnes terminos eſſe antecedentes,& conſequentes, præter primum, & vltimum,quorum ille tantum eſt antecedens, hic tantum conſequens.

Progreſſio *diſcreta* eſt,in qua non omnes termini ſunt antecedentes,& conſequentes. hoc eſt, non eſt, vt primus ad ſecundum; ita ſecundus ad tertium: ſed tantum, vt primus ad ſecundum; ita tertius ad quartum. Talis progreſſio cernitur in his quatuor numeris 2.4.3.6. in quibus eſt, vt 2 ad 4, ita 3 ad 6; non autem, vt 2 ad 4;ita 4 ad 3, cum inter 2 & 4 ſit ſubdupla; inter 4 & 3 ſeſquitertia proportio.

Proportiones diſcretæ occurrunt plerumq; in regula proportionum.

PROPRIETATES PROGRESSIOnum geometricarum.

Vt melius intelligantur proprietates geometricę progreſſionis notabis, Numerum in ſe ipſum ductum dici quadratum, vt eſt numerus 9, qui naſcitur ex 3 in ſe, ſiquidem ter 3 ſunt 9. Deinde idem numerus in quadratum ductus dicitur cubus, vt eſt numerus 27; nam ter 9 ſunt 27. Idem numerus ductus in cubum, dicitur biquadratum: Idem in biquadratum dicitur ſuperſolidus primus &c.

Prima proprietas. In omni progreſſione geometrica con-

continua numerus tertius eſt quadratus, & vno prætermiſſo quintus, ſeptimus nonus, vndecimus, &c. Quartus verò eſt cubus, & duobus prætermiſſis ſeptimus, decimus, decimus tertius, &c. Rurſus quintus eſt biquadratus, & tribus prætermiſſis, nonus, decimus tertius, &c.

Secunda proprietas. Si quicunque terminus in ſe ducatur in continua proportione, tantum aberit productus ab illo, quantum ipſe abeſt ab vnitate. Vt in progreſſione prima, quartus, hoc eſt, 8 tantum abeſt, ab vnitate, quantum ipſe abeſt à 64. Vnde manifeſtum eſt, non eſſe neceſſe, vt omnes intermedij termini inueniantur. Vt ſi in prima progreſſione inuenire velim terminum vigeſimum ſeptimum, duco in ſe decimumquartum, nempe 8192, producoque 67108864; hic in ſe ductus progignit quinquageſimum tertium.

Tertia proprietas. Datis tribus terminis quibuſcunq; progreſſionis continuæ, erit quadratum medij, æquale producto extremorum.

Quarta. Datis in continua progreſſione quatuor quibuſcunq; terminis, erit productum mediorum, æquale producto extremorum. Idem in diſcreta verum eſt, ſi fuerit, vt primus ad ſecundum, ita tertius ad quartum. *Vnde ſi in regula proportionum productum primi, & quarti æquale fuerit producto ſecundi & tertij, operatio legitima erit.*

Quinta. Quadratum cuiuſcunque numeri progreſſionis continuæ, eſt æquale producto duorum æqualiter ab ipſo diſtantium.

De progreſſione Muſica.

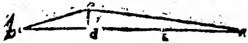
Muſica

Muſica progreſſio eſt talis trium numerorum ſeries, vt quę eſt proportio maximi,& minimi,ea ſit differentiarum maximi & medij, & medij atque minimi. Vt in his tribus numeris videre licet, 6.4.3. Differentia maximi & medij eſt 2; medij & minimi 1. inter quos eſt proportio dupla,qualis etiam eſt inter 6 & 3 maximum, & minimum.

Reperiuntur tres muſicè proportionales,ex tribus arithmeticè proportionalibus , ſi primus arithmeticè proportionalis in ſecundũ & tertium,ſecundus verò in tertiũ ducatur:Ita ex his tribus 2.4.6. arithmeticè proportionalibus reperiuntur hi tres 8.12.24.muſicè proportionales.Quod autem eiuſmodi numeri ſint muſicè proportionales, inde cõſtat,quod in pleriſq; reperiãtur tres illæ proportiones ex quib.tota Muſica pendet; nimirũ dupla,ſiue διὰ πασῶν, quæ octauam conſtituit: ſeſquialtera ſiue διὰ πέντε, quæ quintã conſtituit:ſeſquitertia, ſiue διὰ τεσσάρων,quæ conſtituit quartã.Cernuntur enim in his numeris 6.4.3. dictæ proportiones: nam inter 6 & 3 eſt dupla: inter 6 & 4 ſeſquialtera:inter 4 & 3 ſeſquitertia. At in his 24.12. 8 cernuntur tripla, quæ eſt compoſita ex dupla, & ſeſquialtera, eſtq; apud muſicos duodecima:dupla,& ſeſquialtera; hoc eſt , octaua,& quinta. Quod vt melius intelligas , noueris apud muſicos eſſe vndecim cõſonantias, non quod plures non ſint,cùm infinitæ ſint; ſed quod his vndecim tãtum in cantilenis componendis vtantur muſici. Sunt autem iſtæ 1.3.5.6.8.10.12.13.15.19.20; quarum hæ ſex 1.5.8.12.15.19. ſunt perfectæ: Hæ quinque 3.6.10. 13.20 imperfectæ.Componitur tertia ex 32 & 27. quinta ex 3 & 2. Sexta ex 27 & 16. Octaua ex 2 & 1 Deci-

ma

ima ex 64 & 27. duodecim ex 3 & 1. decimatertia ex 27 & 8. decima quinta ex 4 & 1. decima nona ex 6 & 1. vigeſima ex 27 & 4; quarta ex 4 & 3. Tonus ex 9 & 8. Semitonium maius ex 2187 & 2048; ſemitonium minus ex 256 & 243. &c. Quæ dicta ſunt fortaſſis melius intelliges ex hac figura. In qua ſpacium in tot partes ſit diuisũ, quot faciunt duo numeri conſonantiã componentes, numereturque ex b in d minor numerus; ex d in a maior; atque ex d fulcrum erigatur; nam ſi tangantur chordæ a e, e b edetur illa conſonantia, quam numeri illi componunt. *Exemplum.* Octaua componitur ex 2, & 1: Si ergo a b a in d 2; à d in b vnum numeretur, erigaturque ex d fulcrum, & vtraque pars chordæ a e, e b tangatur, edetur octaua. Si verò a d in tres, d b in duas diuidatur, edetur quinta, &c.



Aduertendum etiam eſt, duos illos numeros, ex quibus conſonantiæ componuntur, per modum fractionis poni; hoc modo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Iam ſi conſonantiæ conſonãtia addenda ſit, ducantur tam ſuperiores, quam inferiores in ſe; ita vt ex his $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, octaua nimirum, & quinta, fiat hæc $\frac{2}{6}$, ſiue $\frac{1}{3}$, nempe duodecima. Si verò vna ab altera ſubtrahenda ſit, fiat id per crucem. Vt ſi hæc $\frac{2}{3}$ ex hac $\frac{1}{2}$, nempe quinta ex octaua ſit ſubtrahenda, remanebit hæc $\frac{3}{4}$, ſcilicet quarta. Sed hæc muſicis relinquimus.

Articvlvs V.

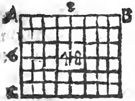
De numero figuras geometricas repræſentante.

E Figu-

Figuræ geometricæ numeris repræſentatæ, ſunt aut planæ,aut ſolidæ.Planæ ſunt,trilateræ, quadrilateræ,& multilateræ.Solidæ,ſunt cubi , parallelepipeda, columnæ,pyramides, &c.

DE NVMERIS PLANIS.

Numerus *planus* eſt , qui gignitur ex ductu duorum numerorum in ſe.Vt ſi 8 in 6 ducantur, gignentur 48, qui numerus planus dicitur.



Multiplicantes, vocantur latera. Vt ſi in figura B C, latus A B ponatur 8,AC 6 pedum: figura ipſa dicatur plana. Habet hæc figura 48 cellulas,quę omnes ſunt quadratulæ,& dicuntur pedes quadrati , ſi quidem latera pedibus menſurentur.

Numerus *quadratus* eſt,qui ex numero in ſeipſum ducto creatur, cuiuſmodi ſunt 4. 9. 16. 25.36.49 64 81. 100.&c. Nam primus ex binario in ſeipſum ducto creatur,ſecundus ex ternario,tertius ex quaternario.

Sunt præter quadratos,numeri *triangulares,pentagoni hexagoni,heptagoni,octogoni.* Triangulares fiunt ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt vnitas. Ita ex 1 & 2 fit 3 ; ex 1.2.3 fit 6;ex 1 .2.3 .4.fit 10.&c.

Quadrati fiunt ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt binarius. Ita ex 1 & 3 fit 4.Ex 1.3.5 .fit 9.Ex 1,3,5.7.fit 16.&c.

Pentagoni creantur ex ſumma progreſſionis arithme-

ticæ

ticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt ternarius; Ita ex 1.4. fit 5; ex 1.4.7 fit 12. ex 1.4. 7. 10 fit 22. &c.

Hexagoni creantur ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt quaternarius. Ita ex 1.5. fit 6. Ex 1.5.9. fit 15. Ex 1.5.9.13. fit 28. &c.

Heptagoni fiunt ex ſimili progreſſione, cuius differentia eſt 5; octogoni ex illa, cuius differentia eſt 6. &c.

Numerus altera parte longior eſt, qui producitur à duobus ſola vnitate differentibus cuiuſmodi ſunt. 2.6. 12.20.30.42. primus naſcitur ex 1 & 2; ſecundus ex 2 & 3; tertius ex 3 & 4; quartus ex 4 & 5; quintus ex 5 & 6 &c.

ANNOTATIO I.

	Radices	△	□	Pentagoni	Hexagoni	
	1	1	1	1	1	
	2	3	4	5	6	
A	3	6	9	12	15	B
	4	10	16	22	28	
	5	15	25	35	45	
	6	21	36	51	66	
	7	28	49	70	91	
	8	36	64	92	120	
	9	45	81	117	153	

Ex hac tabula apparet.

Primò. *Pentagonũ generari ex quadrato collaterali, & triangulo præcedente.*

Secundò, *Hexagonum ex quadrato collaterali, & duplo præcedẽtis trianguli.*

Tertiò. *Omnes lineas tranſuerſales eſſe progreſſiones*

nes arithmeticas. Ita vides in linea A B, ſi ad hexagonum 15 addantur 3, fore heptagonum; ſi ad hunc 3. fore octogonum; ſi ad hunc 3. fore enneagonum, &c.

Quarto. *Si ex duplo quadrati ſubtrahatur radix, reſtare collaterale Hexagonum.*

Quintò. *Semiſſem ſumma Hexagoni, & radicis, eſſe quadratum.*

Sextò. *Duplum quadrati mutilatum triangulo collaterali, relinquere Pentagonum collaterale.*

Septimo. *Datis tribus triangularibus continuis, ſummam extremorum vnitate excedere duplum medij.*

Octauò. *Datis quatuor triangularibus continuis, ſummam extremorum binario excedere ſummam mediorum.*

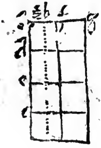
Nonò. *Duos continuos triangulares conſtituere quadratum.*

Decimò. *Summam quadratorum duorum triangularium continuorum, conſtituere triangularem. Sint duo triangulares continui 3 & 6; eorum quadrata 9 & 36, faciunt 45. triangularem nonum.*

Vndecimò. *Datis tribus triangularibus continuis, productum extremorum cum medio facere quadratum medij.*

Duodecimò. *Datis quatuor triangularibus continuis, productum extremorum, cum medijs vnitate excedere productum mediorum. Multa alia deducet ex hac tabula ingenioſus lector.*

Annotatio II.



Si quis miretur, cur, quando fractus per fractum minus vtroq; fracto, quando verò fractus per integrum multiplicatur, minus integro proueniat, is rem hinc facile intelliget. Quando a f duco in 3, nempe in a d, d e, e c pro-

tur tres cellulæ: quando duo, nimirum a f, f g duco in 3, a d, d e, e c producuntur 6 cellulæ: quando vero dimidium duntaxat a b duco in a d, d e, e c, producuntur tantum tres dimidiæ cellulæ, hoc eſt, 1 $\frac{1}{2}$: *Patet ergo cur, quando duco* $\frac{1}{2}$ *in* 3 *producatur minus quam* 3; *hoc eſt tantum* 1 $\frac{1}{2}$.

Quando vero fractum per fractum, aut integrum per fractum diuido, cur plus proueniat, ſic oſtendo. Toties vnitas continetur in quoto, quoties diuiſor in diuidendo. Vt cum diuido 12 *per* 4, *proueniunt* 3, *eo quod* 4 *in* 12 *ter contineantur. Ergo etiam cum diuido* 3 *per* $\frac{1}{2}$, *proueniunt* 6; *ideo, quod vt* $\frac{1}{2}$ *in* 3 *ſexies continetur, ita etiam vnitas in quoto ſexies contineri debeat. Idem de multiplicatione oſtendo. Cum enim qualis eſt proportio vnius multiplicantis, & vnitatis, talis ſit producti, & alterius multiplicantis, ſi multiplicentur* 3 *per* $\frac{1}{2}$, *ſitque vnitatis &* $\frac{1}{2}$ *proportio dupla; erit quoque* 3, *& producti dupla, ac proinde productum erit* 1 $\frac{1}{2}$, *minus quam* 3, *alter multiplicantium.*

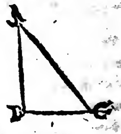
ANNOTATIO III.

Poſſunt ex planorum numerorum notitia huiuſmodi quæſtiunculæ deduci. Eſt area circularis, cuius diametrus eſt 100 *paſſuum, area* 20 *iugerum. Quæro ſi diametrus ſit* 350 *paſſuum, quot iugerum futura ſit area? Accipe pro diametris quadrata diametrorum, hoc modo,* 10000 | 20 | 122500, *& reperies, operatione abſoluta,* 245 *iugera.*

Eodem modo agendum eſt, ſi area ſit quadrata, pentagona hexagona, &c. Sit enim area quadrata, cuius latera ponantur 30 *paſſuum, area* 12 *iugerum: quæro ſi latera ponantur* 100 *paſſuum, quot iugerum ſit area? Accipe quadrata laterum.*

*hoc modo,*900 | 12 | 10000,*& reperies,operatione abſoluta,* $133\frac{1}{3}$ *iugera.*

*Idem in triangulis, & figuris oblongis ſimilibus verum eſt. Sit enim trianguli rectanguli, a b c latus a b,*40, *b c* 30 *paſſuum; area* 20 *iugerum. Quæro ſi a b ſit* 120, *b c* 90 *paſſuum, quanta futura ſit area? Quadratum vtriuſq; lateris minoris trianguli eſt* 4900, *vtriuſq; maioris* 44100: *ergo ſic ſtat exemplum.* 4900 | 20 | 44100 *operatione abſoluta reperies aream maioris trianguli* 180 *iugerum. Demonſtratio pendet ex* 19 *&* 20 *ſexti, & ex* 2 *duodecimi Euclidis.*



DE NVMERO SOLIDO.

Numerus ſolidus eſt, qui ex tribus in ſe multiplicatis gignitur, vt, ex 2. 3. 4 fit 24. *Solidus* numerus, aut eſt cubus, aut parallelepipedum, aut pyramis, aut columna &c. *Cubus* eſt, cum tres æquales numeri in ſe ducuntur; vel cum idem numerus in ſe, poſtea in productum ducitur, veluti ſunt numeri 8. 27. 64. 125. 216. &c. Primus fit ex 2; ſecundus ex 3; tertius ex 4, quartus ex 5, quintus ex 6. *Parallelepipedum* fit ex duobus, aut tribus; ſi ex duobus, erit baſis quadrata; ſi ex tribus oblonga, poſſunt baſes quoque eſſe triangulares, hexagonæ, pentagonæ, &c.

Pyramis, ſi habeat triangularem baſim, fit ex aggregato omnium triangulorum. Quadratæ ex ſumma quadrato-

dratorum. Pentagonæ ex pentagonorum. Hexagonæ ex hexagonorum, &c.

Columnæ, cuiuſcunque generis ſint, fiunt ex ductu cuiuſcunque numeri in ſuperficiem illius ſpeciei, cuius ſunt ipſę columnę, vt triangularis in triangulum, & numerum quemcunq; quadratæ in quadratum, & numerum quemcunque, Pentagonæ in pentagonum, &c. Vide hac de re Franciſcum Maurolycum initio libri primi.

ANNOTATIO I.

Sequuntur ex numeris ſolidis hæc. Primò. *Si duorum triangularium numerorum continuorum quadratum minoris ex quadrato maioris tollatur, reſtare cubum, cuius radix eſt radix maioris trianguli. Secundò, duos primos impares poſt vnitatem, nempe 3 & 5 conſtituere cubum binarij, Tres ſequentes 7. 9. 11, cubum ternarij. Quatuor ſequentes 13. 15. 17. 19, cubum quaternarij, &c. Quod ſi quis ſcire velit, qui impares cuiuſcunque radicis cubum conſtituant, deducat ex quadrato illius numeri numerum vnitate minorem, & habebit minimum imparem, eundem numerum eidem quadrato addat, & habebit maximum imparem.* Exemplum. *Volo ſcire, qui duodecim impares conſtituant cubum duodenarij. Quadrato duodenarij addo, & ab eodem tollo 11, numerum vnitate minorem duodenario, & reperio duos extremos impares 133 & 155; horum cum 10 intermedijs ſumma eſt 1728, & tantundem etiam facit cubus duodenarij.*

ANNOTATIO II.

Ex cognitione cubi tales quæſtiunculæ ſolui poſſunt. E fiſtula ænea, cuius foramen eſt vnius digiti, eijcit globum $\frac{3}{4}$ vnius libræ, quæro ſi foramen ſit 4 digitorum, quot librarum eſſe debeat globus? Duc digitos ad cubos, & ſtabit ſic exemplum 1 | $\frac{3}{4}$ | 64, facta operatione reperies 48 libras.

Alia, Eſt cubus, cuius latera ſunt 6 pedum, capacitas 800 vrnarum; quæro ſi latera ſint 4 pedum, quot vrnarum ſit capacitas? Accipio pro lateribus cubos laterum, hoc modo. 216 | 800 | 64 reperioque operatione facta, vrnas 237 $\frac{1}{27}$.

CAPVT V.

DE RADICVM EXTRActionibus.

Radices ſunt numeri ſecundum naturalem ordinem ab vnitate procedentes, nimirum 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. vt in ſecunda columna ſub titulo ℞ cernis. Quadrati fiunt ex radicibus in ſe ductis. & notantur ſigno q: Cubi ex ductu radicis in quadratum, & notantur ſigno ℭ. Biquadrati ex cubo in radicem, & notantur ſig. qq ſuperſolidi primi ex biquadrato in radicem & notantur ſigno ß. Quadrati ex ſuperſolido primo in radicem, & notantur ſigno q ℭ &c.

TABV-

TABVLA RADICVM ET GRADVVM:

A B

2	1	3	4	5	6	7	8
℞	q	ꝗ	qq	ß	qꝗ	ßb	qqq
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	57648
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	1677721
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	430467
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	1000000

B F

9	10	11	12
ꝗꝗ	qß	ßc	qqꝗ
1	1	1	1
512	1024	2048	4096
19683	59049	177147	531441
262144	1048576	4194304	16777216
1453125	9765625	48828125	244140625
10077696	60466176	362797056	2176782336
40353607	282475249	1977326743	13841287201
134217728	1073741824	8589934592	68719476736
387420489	3486784401	31381059609	282429536481
1000000000	10000000000	100000000000	1000000000000

In ſeptima columna ſunt ſuperſolidi ſecundi ſſb. In octaua triquadrati qqq. &c. Vt tum characteres, tū gradus in infinitum extēdas, voco numeros ſupremæ columnæ tranſuerſæ C D graduales; perpendicularis A B, Radices. Characteres ergo extenſurus, diuide numerum gradualem datum in numerum quemcūq; diuiſoremq; & quotum quære in numeris gradualibus atq; characteres illis ſubiectos coniunge, & habebis characterem numeri gradualis dati.

Exemplum. *Cupio habere characterem numeri gradualis huius 12. diuido illum per numerum quēcunq; 3, & proueniunt 4 characteres numerorum 3, & 4, nempe ℭ, & qq, coniungo & habeo characterē numeri 12, hunc qqℭ characteri numerorum primorum, qui ſunt 5 7 11. 13. 17 &c eſt hic ſ, cui addantur literæ B, C, D&c characteri numeri 5, addi deberet A, ſed communiter nulla addi ſolet.*

Gradus extenſurus, duc graduum datum in radicem reſpondentem.

Exemplum. *Volo extendere gradū hunc 4, columnæ perpendicularis E F, duco illū in radicem reſpondentem, 2 & produco 8, gradum ſequentem; hoc rurſus ducto in 2, produco gradum hunc 16. &c.*

Quod ſi gradus remotos, nō notis intermediis, habere cupias, diuide numerum gradualem per numerum quemcunq;, quotum & diuiſorem quære in colūna tranſuerſa, C D, & vel quotū iuxta characterem diuiſoris, vel diuiſorē iuxta characterem quoti multipli-

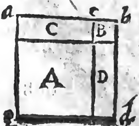
tiplica, & reperies gradum quæſitum. Exemplum. *Cupio habere gradum duodecimum radicis 4 ſeu colũnæ P Q̄ Diuido 12 per 3 proueniũt 4. character & 3 eſt* ℭ, *character 4 eſt qq. Aut ergo 64 cubũ radicis 4, duco ad biquadratum; aut 256 biquadratũ eiuſdẽ radicis ad cubũ, vtrũ n. fecero, reperero 16777216. Reperiuntur ijdem gradus, ſi numerus gradualis diuidatur in quotcunq; numeros & gradus illis numeris ſubiecti in ſe ſigillatim ducantur. Vt ſi 12 diuidantur in 3. 4. 5. & gradus illis in columna V. G. P Q̄. ſubiecti nimirum 64. 256. 1024 in ſe ducantur. Nam ſi duxero 64 in 256 produco 16384: ſi hunc numerum in 1024 produco 16777216. &c.*

ARTICVLVS I.

TABVLAM PRO EXTRAHENDIS radicibus conſtruere.

Primo ante oculos nobis ponamus prop. 4. ſecundi Euclid. quæ ſic habet.

Quando numerus in duas partes vtcumque diuiditur, erunt partium quadrata, vna cum duobus partium rectangulis, æqualia quadrato totius.



Vt ſi numerus 12 diuidatur in 10 & 2, erit quadratum maioris partis 100, minoris 4, quod ex 10 in 2 fit rectangulum bis acceptum, 40; ſed 100, 4, & 40 faciunt 144, quantum etiam facit quadratum totius lineæ ab, ſeu 12. In ſchemate ad- iecto,

iecto, linea a b in c eſt vtcumque diuiſa: quadratum partis a c eſt ſpatium A; partes b c, ſpatium B, rectangula ſub partibus a c, c b contenta, ſunt C & D: at hæc quatuor A, B, C, D æquantur totius lineæ a b ſpatio. Vocetur pars a c, A, c b, B: & ſit A + B, tota linea (ſignum hoc + ſignificat plus) totum quadratum a d eſt A q + A 2 in B + B q: nam A q ſignificat ſpatium A; A 2 in B ſignificat ſpatia C, D: B q, ſpatium B. Fit autem hæc formula A q + A 2 in B + B q, ex ductu A + B in ſe. Nam A in A facit A q: A in B, facit A in B ſemel. Rurſus B in A facit A in B ſemel. Denique B in B facit B q. Quando enim ducitur A in A, aut B in B, mutatur character minor in proximè maiorẽ, vt q in c: c in qq. &c. Quando verò ducitur A in B; aut B in A character non mutatur, ſed ex vtroque fit A in B. Ergo hæ duæ formulæ coniunctæ, faciunt A q + A 2 in B + B q. Cũ n. A in B bis ſit poſitũ, debent ad A apponi 2, hoc modo, A 2 in B.

	A + B
	A + B
	A q + A in B
	A in B + B q
	A q + A 2 in B + B q
	A q + A in B
	A in B + B q.

1. A in B.
2. A q + A 2 in B + B q.
3. A c + A q 3 in B + A 3 in B q + B c.
4. A qq + A c 4 in B + A q 6 in B q + A 4 in B c + B qq.
5. A ß + A qq 5 in B + A c 10 in B q + A q 10 in B c + A 5 in B qq + B ß.
6. A q c + A ß 6 in B + A qq 15 in B q + A c 20 in B c + A q 15 in B qq + A 6 in B ß + B q c.
7. A ß 6 + A q c 7 in B + A ß 21. in B q + A qq 35 in B c + A

+A c 35 in B qq + A q 21 in B ß + A 7 in B q c + B ß 6.

Pro tertia formula, quæ eſt pro radice cubica; duc A q + A 2 in B + B q, in A + B hoc modo. Ex A in A q, fit A c: ex A in A 2 in B, fit, A q 2 in B: Ex A in B q, fit A in B q. Item, ex B in A q fit A q in B: ex B in A 2 in B, fit A 2 in B q: ex B in B q, fit B c Formulæ duabus lineis incluſæ, faciunt A c + A q 3 in B + A 3 in B q + B c Vt in appoſita formula apparet.

A q + A 2 in B + B q
A + B
A c + A q 2 in B + A in B q
A q in B + A 2 in B q + B c
A c + A q 3 in B + A 3 in B q + B c

Nam A q 2 in B, & A q in B faciunt A q 3 in B: & A in B q, cum A 2 in B q, facit A 3 in B q. Eodem modo conſtructæ ſunt reliquæ formulæ. Nam quarta facta eſt ex ductu tertiæ in A + B: quinta ex ductu quartæ in A + B, &c.

ARTICVLVS II.

OMNIS GENERIS RADICES extrahere.

Vt facilius radices extrahantur, notentur hæc. *Primo* ſub numero primo verſus dextram, ponẽdum eſſe punctum. Deinde in extractione radicis quadratæ, vno prætermiſſo, ſub tertio, quinto, ſeptimo, &c. In extractione cubicæ, duobus prætermiſſis, ſub quarto, ſeptimo, decimo, &c. In biquadratæ, tribus prætermiſſis ſub quinto, nono, decimotertio, &c.

Secundò, in formulis ſupra poſitis, primum A cum ſuo charactere, tantum in primo quoto vſurpari; pro reliquis nullam amplius eius rationem haberi.

Ter-

Tertiò. Quotum inuentum, ſiue vnam, ſiue plures habuerit figuras, vocari A, inueniendum B.

Quartò, pro noui diuiſoris inuentione, inuentum quotum eſſe multiplicandum, vt character, & numerus poſt A poſiti, indicant.

His notatis extrahemus ex hoc numero 4692 798016 radicem quadratā, hac vſi formula A q + A 2 in B + Bq. Notatis itaque punctis, video in ſecunda columna tabulæ radicum, & graduū, quis numerus quadratus proximè minor ſit numero vltimi membri verſus ſiniſtram, nimirum numero hoc 46, inuenioque 36, cuius radicem 6 pono poſt lunulam; & 10, quæ ſubtractis 36 ex 46, reſtāt ſcribo ſupra 46, vt in prima apparet operatione. Pro alio diuiſore, cum in formula habeam + A 2,

Operatio 1.

1 0
4692798016 (A 6
1 2

Operatio 2.

1068
4692798016 (AB 68
1236
1

duco quotum 6 A, in 2, & habeo nouum diuiſorem 12. Cuius priorem figuram 2 pono poſt quartum punctum, nempe ſub 9, alteram deinceps ſiniſtrorſum, & video quoties in 10 contineatur: continetur ſæpius, quam octies, poſſum tamen propter ſequentem quoti figurā, non niſi 8 accipere. Et quia habeo in formula A 2 in B, duco duplum quoti 6 A, in 8 B, quotum iam inuētum, & produco 96. Rurſus quia in formula habeo + Bq, addo quadratum quoti 8 B, nempe 64, ad 96, hoc modo, & conflo 1024 quibus ex 1092 ſubtractis reſtant 68, vt in ſecunda operatio-

96
64
1024

peratione apparet: Pro tertio diuiſore, cum habeam in formula A 2, duco totum quotum 68 A in 2, & produco 136, diuiſorem nouum, cuius figura prima poſt tertium punctum, nempe ſub 7 poſita, & reliquis deinceps, vt in ſecunda vides operat. video quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies.

Repono 5 ad quotum: Et, quia habeo in formula, A 2 in B, duco 5 B, in diuiſorem 136, & produco 680, quibus addo quadratũ quoti 5 B, quod habeat formula + B q, hoc modo, ſummam 6825 ſubtraho ex 6879, & reſtant 54, vt in tertia operatione cernis.

Operatio 3.

```
 10085 4
 400270 8016   ( A    | B
 12350 70        68   | 5
 113
```

```
 680
  25
----
6825
```

Pro alio diuiſore duplico totum quotum hactenus inuentum, nimirum 685, & inuenio 1370, vt in tertia apparet operatione, collocatoque o ſub 8 poſt ſecundũ punctum, & reliquis figuris deinceps ſiniſtrorſum, video nihil accipi poſſe: pono ergo ad quotum o, & paro nouum diuiſorem, vt prius, qui erit 13700. Hoc diuiſore collocato, vt in quarta operatione apparet, video quoties 1 in 5 contineatur, continetur quater poſitis igitur 4 ad quotũ, duco totũ diuiſorẽ in 4 B, & produco 54800, quibus



Operatio 4

```
 100884
 40027080010   ( A      | B
 1235070 00       6850  | 4
 11337
 1
```

addo

addo quadratum quoti 4 B, hoc modo ſummam 548016 ſubtraho ex 548016, & reſtat nihil, vt in quarta operat. apparet.

54800
16
548016

Vulgari modo ſic extraho radicem quadratam.

Noto puncta, vt prius, & video quis numerus quadratus ſit proxime minor numero vltimi membri 46 & video 36: pono ergo eius radicem 6 ad quotum, vt ſupra.

Operatio 1.

```
  2
 1 0
4 6 9 2 7 9 8 0 1 6 ( 68
 1 2 8
```

Operatio 2.

```
   1
   2
 1 0 3
4 6 0 2 7 9 8 0 1 6 ( 68
  1 2 8
```

Deinde duplum quoti nempe 12 aſſumo pro nouo diuiſore quem pono, vt prima habet operatio, & video quoties 1 in 10 contineatur, continetur octies: 8 ergo pono, & ad quotum, & ante diuiſorem 12 ſub 2, & dico octies 2 ſunt 16, quibus ex 29 ſubtractis, reſtant 13; vt in ſecunda apparet operat. Dico iterum octies 8 ſunt 64, quibus ex 132 ſubtractis, reſtant 68, vt tertia habet operatio. Pro nouo diuiſore aſſumo duplū quoti 68, quod eſt 136, quem pono, vt tertia habet operatio, & video quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies: 5 ergo & ad quotum, & ante diuiſorem 136 ſub 9 pono, vt in tertia

Operat. 3.

```
  1
  2 6
  0 3 8
4 6 0 2 7 9 8 0 1 6 ( 685
  1 2 8 6 5
    1 3
```

tia operatione, & progredior per omnia, vt hactenus, &c.

Secundum exemplum radicis cubicæ ſit hoc. Volo ex numero hoc 1010644583 12 extrahere radicem cubicam. Notatis punctis video in tabula radicum, quis cubus ſit proximè minor numero vltimi membri 101, & video eſſe cubum 64, cuius radicem 4 pono poſt lunulam, & ſubtractis 64 ex 101. reſiduum 37, pono ſupra 101, vt in prima operat. apparet. Diuiſorem iam paro hoc modo. In formula habeo + A q 3: quadratũ ergo quoti 4 A, iam inuenti, duco in 3, & produco 48. Præterea in formula habeo + A 3: ergo quotum 4 A duco in 3, & produco 12. Hos itaq; duos numeros 48, & 12, ſic addo & conflo 492, diuiſorem, cuius figuram 2 pono ante punctum tertium ſub 6, reliquas deinceps ſiniſtrorſum, vt in prima apparet operat. & video quoties 4 in 37 contineantur: continentur propter ſequentes figuras, tantum ſexies: pono ergo 6 ad quotum: & quia in formula habeo + A q 3 in B, duco 6 B, quotum in triplum quadrati quoti 4 A, nempe in 48, & produco 288. Rurſus quia in formula habeo + A 3 in B q, duco triplum quoti 4 A, nempe 12 in quadratum quoti 6 B, nempe in 36, & pro-

48
12
———
492

Operatio 1.

37
101064458312 (A 4
492

Operatio 2.

3
37728
101064458312 (AB 46
402618
63

duco

duco 431. Deniq; quia in formula habeo + B c, accipio 6 B, quoti cubum 216: atque hos tres numeros

288
432
216
33336

vt hic apparet, addo, & conflo 33336 quibus ex 37064 ſubtractis, reſtant 3728, vt in ſecunda operat. apparet. Paro iterum nouum diuiſorem, hoc modo. In formula habeo + A q 3, quadratũ ergo totius quoti hactenus inuenti 46 A, duco in 3. Duco quoq; 46 A quotũ in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 6348, 138 quos ſic adddo

6348
138
63618

& conflo 63618, diuiſorem nouum, quem colloco, vt ſecunda monſtrat operatio, hoc eſt, pono figuram primam 8 poſt ſecundum punctum ſub 5, & reliquas deinceps. Qua collocatione facta, video quoties 6 in 37 contineantur: continentur propter ſequentis diuiſoris figuras, tantum quinquies: pono ergo 5 ad quotum, qui eſt quotus 5 B. Et quia in formula habeo + A q 3 in B, & + A 3 in B q, & B c, duco A q 3, hoc eſt 6348 in 5: 138 in 25; & produco 31740 & 3450, quos numeros, & cubum ipſius 5 B quoti noui addo, hoc modo

Operatione 3.

519	A	B
37728833	46	5
101004488316		
40201818145		
03488		
6		

31740
3450
125
3208625

& conflo 3208625, quibus ex 3728458 ſubtractis, reſtant 519833, vt in tertia operat. apparet. Denique pro vltimo diuiſore duco quadratum totius quoti 465 A, hactenus inuenti

uenti in 3, quod in formula habeam A q 3; Eundem quotum duco in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 648675, 1396, quibus ſic additis conflo 6488145, diuiſorem nouum, quo collocato, vt in tertia operatione cernis, video quoties 6 in 51 contineantur; continentur octies: erit igitur 8 quotus B, quem ſi duxero in 648675, & eius quadratum in 1395, produco 5189400, & 89280: quos numeros, & quoti 8 B cubum, ſi addidero hoc modo conflabo 519833312, quo numero ex reſiduo 519833312 ſubtracto, reſtat nihil. Radix ergo cubica numeri propoſiti 110644583312, eſt 4658.

648675
1395
6488145

5189400
89280
512
519833312

Operat. 4.



3580
37728855
10106445851 2 (A 465 | B 8
4020181 45
05488
6

Exemplum tertium radicis ſuperſolidi primi, ſit hoc, 1099511627776. Notatis punctis, video in tabula radicum, quod ſuperſolidum primum proximè minus ſit numero vltimi membri 109, & reperio 32, cuius radicem 2, pono ad quotum, & ſubtraho 32 ex 109,

Operatio 1.

77
1099511627776 (A 2 | B 5
88410

atque reſiduum 77, pono ſupra 109, vt in prima operatione apparet. Pro primo diuiſore accipio formulam quintam, in qua habeo + A qq 5: quotum ergo 2 A, duco ad biquadratum, quod eſt 16, quo ducto in 5 fiunt 80. Secundò habeo + A cc 10; ducto ergo cubo ipſius 2 A, ſcilicet 8 in 10, produco 80. Tertiò habeo + A q 10: ergo quadratum ipſius 2 A duco in 10, & produco 40. Quartò habeo A 5; ducto 2 A in 5 produco 10, Hos igitur quatuor numer. 80. 80. 40. 10, addo hoc modo, & conflo 88410, diuiſorem primum, eius primam figuram 0, pono proxime poſt ſecundum punctum, nempe ſub 1, & reliquas ſiniſtrorſum deinceps, & video quoties 8 in 77 habeantur, habita ratione ſequentiũ figurarũ, habentur quinquies: ergo 5 ad quotũ poſitis, duco primo 5 in 80, nimirum in biquadrati quoti 2 A quintuplũ, eo quod formula habeat A qq 5 in B, & produco 400. Secundò, duco quadratum quoti 5 B in decuplum cubi quoti 2 A, ſcilicet 25 in 80, quod formula habeat A cc 10 in B q & produco 2000. Tertio, duco cubum quotis B, in decuplum quadrati quoti 2 A, nempe 125 in 40, quod formula habeat A q 10 in B cc & produco 5000, Quartò, duco biquadratum quoti 5 B in quintuplum quoti 2 A, quod formula habeat A 5 in B q q, & produco 6250. Quintò, cum in formula habeam B ſs, addo his numeris 400. 2000. 5000. 6250 ſuperſolidum primum ipſius 5 B, quoti, nempe 3125, hoc modo, & produco 6565625, quibus ex 7795116 ſubtractis reſtât 1229491. Tertiũ quotũ 6 reperies, ſi cum inuẽto quoto 25 A, progreſſus fueris, vt ante factũ eſt.

80
80
40
10
88410

400
2000
5000
6250
3125
6565625

Primò

Operat. 2.



12
7729491
10008112027776 (A | B
25 | 6
88401

Primò, notabis radicem biquadratam facilius extrahi, ſi bis quadrata extrahatur. Primò ex numero propoſito: iterum ex radice inuenta. Item quadrati cubicam extrahes ſi primũ quadratã; deinde ex radice inuẽta cubicam extraxeris. Atque vniuerſim ſi radices illas extrahas, quas characteres oſtendunt, erit radix extrahenda inuenta.

Secundò, ex fractis extrahuntur radices, ſi tam ex denominatoribus quam ex numeratoribus extrahantur. Ita radix quadrata huius fractionis $\frac{2}{25}$, eſt $\frac{3}{5}$, cubica huius $\frac{8}{27}$, eſt $\frac{2}{3}$.

Tertiò, quando facta extractione, quod plerumque accidit, reſidua fuerint, præfige numero, ex quo radix extrahenda eſt, ſi quidem radicem quadratam extracturus es, duas, quatuor, ſex, &c. cyphras; ſi cubicam, tres, ſex, nouem, &c. Si ſuperſolidam primam, quinque, decem, quindecim, &c. Sit igitur ex hoc numero 474 radix quadrata extrahẽda. Præfigo illi quatuor cyphras hoc modo, 4740000, cuius numeri radix quadrata eſt 2177; ſed quia numeri 474 radix proxima eſt 21, abijcio 77 ex 2177, iiſq; ſuppono 100, hoc modo 21 $\frac{77}{100}$. Centum autem ideo ſuppono, quod quatuor cyphræ numero 474 fuerint adiectæ.

EXAMEN.

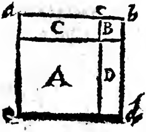
Fit examen in omnibus eodem ferè modo, quo in diuiſio-

uiſiuone. Abiiciuntur enim ex quoto, quoties fieri poteſt, 9: quod reſtat ponitur & in ſuperiore,& in inferiore parte crucis; Et, ſi fuerit extracta radix quadrata,in ſe quadratè ducitur: ſi cubica,cubicè: ſi ſuperſolida,ſuperſolidè, &c. Et ex producto, reſiduoque extractionis, ſi quod fuerit, abiiciuntur rurſus 9, quoties fieri poteſt; & ſi quod,facta abiectione, reſtat, æquale fuerit reſiduo numeri, ex quo facta eſt extractio,probabile eſt operationē bonā eſſe: ſi æquale non fuerit,certū eſt erratum eſſe. Optima probatio eſt, ſi quotus in ſe quadratè,cubicè,biquadratè, &c. multiplicetur, prout radix cubica,quadrata,biquadrata,&c. extracta fuerit,& producto reſiduum, ſi quod fuerit, addatur. Si enim extremum hoc productum æquale fuerit numero, ex quo facta ex extractio, bona eſt operatio.

Annotatio.

Poſſunt plures radices ſimul extrahi; ſed curam hanc aliis relinquimus, cum ad noſtrum inſtitutum parum faciat. Non differt re, ſed modo tantum ratio extrahendarum radicum à nobis propoſita, à vulgari. Eſt tamen meo iudicio facilior, magis expedita, & memoriæ iuuandæ accommodatior.

Demonſtratio extractionum.



Cum quadratum a b d e, componatur ex duobus quadratis A, B, & duobus rectangulis C, D, manifeſtū eſt, cur a c quotus inuētus pro nouo diuiſore duplicādus ſit in extractione radicis quadratæ; nimirū propter duo rectangula C,D. Quod vero

vero in extractione radicis cubicæ, tam quadratū quoti inuenti, quam ipſemet quotus ſit triplicandus, hinc conſtat. Quia ſi ſuper quadratum a b d e erigatur cubus, erit ille compoſitus ex duobus cubis, quorum latera ſunt ſegmenta, a c, c b; & ex ſex priſmatis, quorum tria pro baſi habent quadratum ſegmenti a c, altitudinem ſegmentum c b. Reliqua tria pro baſi habent quadratum ſegmenti c b; altitudinem ſegmentum a c. Vnde in forma cubi habetur A c + A q 3 in B + A 3 in B q + B c. Sequentium radicū extractiones ex compoſitione formularum ſatis manifeſtæ ſunt. Vt enim ex A + B in A q + A 2 in B + B q fit formula cubi: ita ex eodē A + B in cubi formulam, fit formula biquadrati; & ex hac in idem A + B, fit formula ſuperſolidi primi, &c.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

LIBER SECVNDVS.

DE NVMERO RATIONALI coſſico.

Hanc Arithmeticæ partem, alij Algebram, alij regulam Coſſ, alij quadraturam vocant. Algebra deſcendit ab radice גבר*, vt opinor. Coſſa, quam plerique ab Italica voce Coſa deſcendere autumant, ego quoque ab radice Hebraica* כסס*, quæ ſupputare ſignificat, deriuari credo.*

Hæc nobilis Arithmetica tres habet partes. Inuentionem æquationis, Reductionem, & Reſolutionē, licet non omnes ad omnium quæſtionum ſolutionem concurrant. Dicuntur numeri coſſici, etiam denominati, quod à certis characteribus denominentur, vt dignoſci inter ſe poſſint. Characteres sũt N. ze q ℭ, qq ß, &c, ÿdem omnino, qui ſupra in radicum tabula poſiti ſunt. Character primus ſignificat numerum abſolutum Secundus radicem. Tertius quadratum. Quartus cubum. Quintus biquadratum. Sextus ſuperſolidum primum Quidam pro ze ponunt literam L, quæ latus ſignificat alÿ ℞. Pro q ponunt quidam ɤ, & quadratum vocant zenſum; quadraticubum zenſicubum; biquadratum zenſizenſum. Ponuntur hi characteres poſt numeros, hoc modo 2 ze, 2 q, 2 ℭ, 2 qq, 2 ß. Primus ſignificat duas radices; Secundus duo quadrata; tertius duos cubos; quartus duo biquadrata, quintus duos ſuperſolidos primos Vt autem ordine procedamus. Primo trademus elementa, & radicum extractionem. Secundo tres partes regulæ explicabimus. Tertiò, vſum dabimus, & praxim; omnia ſumma, qua poſſumus, breuitate.

CAPVT I.

DE ELEMENTIS NVMERORVM coſſicorum.

Notetur alios numeros coſſicos eſſe ſimplices, alios compoſitos, & diminutos. Simplices ſunt, qui nullo connectuntur ſigno. Compoſiti, qui hoc ſigno + connectun-

nectuntur, diminuti, qui hoc — diſiunguntur; ſignificat enim hoc ſignum + plus, hoc — minus.

Articvlvs I.

De simplicium cossicorum Additione, & Subtractione.

Simplicium Additio, & Subtractio, ſi eoſdem habeant characteres, eodem fiunt modo, quo abſolutorum. Vt ſi 8 ze, & 10 ze addantur fient 18 ze. Si 8 ze. ex 18 ze ſubtrahãtur reſtabunt 10 ze. Si diuerſos habeant characteres adduntur per ſignũ +, Subtrahuntur per —. Vt ſi 6, 8 ze, 10 q, & 3 ce addenda forent, fieret hæc ſumma 6 + 8 ze + 10 q + 3 ce. Si vero 6 ex 8 ze eſsẽt ſubtrahenda, relinquerentur 8 ze — 6. Si 10 q, ex 3 ce relinquerentur 3 ce — 10 q.

Articvlvs II.

De multiplicatione, et diviſione coſsicorum ſimplicium.

Quod ad numeros attinet, fiunt multiplicationes, & diuiſiones eo modo, quo abſolutorum. In characteribus autem fit mutatio. Ac primo quidem ſi coſſicus per abſolutum multiplicetur, aut diuidatur, manet idem character. Vt ſi 8 ze. per 4 multiplicentur, fient 32 ze. Si 10 q per 5, fient 50 q. Si 6 ce per 8, fient 48 ce. Si vero 32 ze per 4 diuidantur, prouenient 8 ze. Si 50 q

per 5, prouenient 10 q. Si 48 ce per 8, prouenient 6 ce.

Si coſsici per coſsicos multiplicentur, adduntur eorum exponentes (exponẽtes voco numeros ſupra characteres in ſubiecta tabella deſcriptos) & character sũmæ exponentiũ additur producto. Vt ſi ducantur 4 ze.

0	1	2	3	4	5	6	7
N	ze	q	ce	q q	ß	q ce	ß b
8	9	10	11	12	13	14	15
q q q	ce ce	q ß	ß c	q q ce	ß d	q ß b	ce ß
16	17	18	19	20			
q q q q	ß e	q ce ce	ß f	q q ß			

in 3 q, fient 12 ce : nam cum characterum ze: & q exponentes ſint 1 & 2, eorumque ſumma 3 ſub ſe habeat characterem ce: fit vt producto 12, apponendus ſit character ce. Eodem modo, ſi 6 q ducantur in 10 ce, producentur 60 ß; ſi 2 ß in 8 q ce; fient 16 ß c, &c.

In diuiſione aduerte, quos characteres gerant diuidendus & diuiſor: eorum exponentes ſume; minorem à maiore ſubtrahe, eritque reſiduum exponens characteris quoto adſcribendi. Vt ſi diuidantur 36 ce per 4 ze, prouenient 9 q. Si 10 ce per 5 q. prouenient 4 ze. Si 40 q q per 5 q, prouenient 8 q. Si occurrat diuiſor maiore affectus charactere, quam diuidendus, fiet diuiſio per lineam interiectam. Vt ſi ſint 8 q per 3 ce diuidenda, fiat id hoc modo, $\frac{8q}{3ze}$.

Arti-

Articvlvs III.

De additione, et svbtractione compoſitorum, & diminutorum.

Si diligenter ad ſigna +, —; & ad duo præcepta attendas, facile quoſuis numeros addes, & quemlibet à quolibet ſubtrahes; nam etiam maiores à minoribus in hac pragmatia ſubtrahi poſſunt, quod quando fit, reſiduum eſt minus quam nihil. Præcepta hæc ſunt.

Primum. *Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando prapoſterè ponuntur, tum enim ſubtrahitur, ſuperior ab inferiore, & ex + ſit —; & ex — ſit +.*

Secundum. *Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis, & in additione ponitur ſignum maioris numeri; in ſubtractione verò ſuperioris, à quo ſit ſubtractio, ſiue maior is ſit, ſiue minor, ſiue aqualis.*

Exemplũ Additionis. Incipimus à ſiniſtra, quãquam & à dextra poſſemus, & dicimus 4 & 7 faciũt 11, quibus additur character qℭ, quem 4 & 7 habent.

4qℭ + 3ß + 8ℭ + 10q — 12ze — 20
7qℭ — 6ß — 4ℭ + 12q — 7ze + 16
11qℭ — 3ß + 4ℭ + 22q — 19ze — 4

Quando + 3ß & — 6ß adduntur, fiunt — 3ß; quia cũ habeãt diuerſa ſigna pro additione fit ſubtractio, & retinetur ſignum maioris numeri, iuxta ſecundũ præceptũ. Idem factũ vides in additione + 8ℭ, & — 4ℭ, fiunt .n. + 4ℭ. Idẽ in additione — 20, & + 16; fiunt .n. — 4.

Exem-

Exemplum ſubtractionis. Subtractis 3 qc ex 8 qc reſtant 5 qc.

8qc — 2 ſs + 3 c + 4 q — 10 ze — 12 + 9 Subtractis verò + 5ſs ex — 2 ſs, reſtāt — 7 ſs: quia hic
3 qc + 5 ſs + 9 c — 6 q — 15 ze + 7 + 6 ze
5 qc — 7 ſs — 6 c + 10 q + 5 ze — 19 — 6 ze

pro ſubtractione, fit Additio, & retinetur ſignum ſuperioris. Idem fit quando ſubtrahuntur — 6 q ex + 4 q, reſtant enim + 10 q. Item quando + 7 ex — 12 ſubtrahũtur, reſtant n. — 19 Quãdo verò + 9 c ex + 3 c ſubtrahuntur, reſtant — 6 c; quia hic numeri præpoſterè ponuntur, maior infra, minor ſupra quod qñ fit, ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit —. Idem accidit, qñ — 15 ze ex — 10 ze ſubtrahuntur, ſubtrahitur enim ſuperior ab inferiore, & ex — fit +, ſecundum regulam primam. Quando + 6 ze ſubtrahuntur ex o, ſiue nihilo, reſtant — 6 ze. Si 6 ze haberent ſignum —, reſtarent + 6 ze.

ARTICVLVS IV.

DE MVLTIPLICATIONE, ET DIVIſione compoſitorum & diminutorum.

Quod ad characteres attinet, eadem regula ſeruatur, quæ de ſimplicibus tradita eſt. De ſignis verò + & — hæc datur regula.

Eadem ſigna ponunt ſignum +; diuerſa —.

Sint 6 qq — 5 c + 4 q + 10 ze — 20, per 10 q + 8 ze — 12 multiplicanda. Procedo ſecundum regulas, vt ſubiecta habet formula.

6 qq

```
6 qq — 5 ce + 4 q + 10 ze — 20
10 q + 8 ze — 12
60 qze — 50 ſs + 40 qq + 100 ce — 200 q
         + 48 ſs — 40 qq + 32 ce + 80 q — 160 ze
              — 72 qq + 60 ce — 48 q — 120 ze + 240
60 qce — 2 ſs — 72 qq + 192 ce — 168 q — 280 ze + 240.
```

In omnes ſuperiores ducuntur primo 10q. Secundò 8ze. tertio — 12. Ductis igitur 10q in 6qq, fiunt 60 qce: in — 5ce, fiunt — 50ſs in + 4q, fiunt + 40qq: in 10 ze, fiunt + 100ce: ac deniq; in — 20, fiunt — 200 q. Secundò, ductis + 8 ze in 6 qq, fiunt 48 ſs: in — 5 ce, fiunt — 40qq: in + 4q, fiunt + 32 ce: in + 10 ze, fiunt + 80q: ac denique in — 20, fiunt — 160 ze. Tertiò, ductis — 12 in 6qq fiunt — 72qq: in — 5 ce, fiunt + 60 ce: in + 4q, fiunt — 48 q: in + 10 ce, fiunt — 120 ze: & poſtremo in — 20, fiunt + 240. Additio numerorum inter duas lineas incluſorum, fit ſecundum præcepta Additionis compoſitorum, & diminutorum, hoc nota diligenter quod quãdo alter multiplicantium habet +, alter —, productum ſemper habere — quando vero vterque habet +, aut — productum, ſemper habere + iuxta regulam traditam.

Diuiſio, cum non niſi in exemplis arte factis, locum habeat, eam nos aliter non abſoluemus, quam linea inter diuidendum, & diuiſorem interiecta in morem fractorum. Vt ſi 8q + 10 ze. per 2 ze — 20 ſint diuidenda; ita eos collocabimus $\frac{8q + 10\,ze}{2\,ze.\ 20}$

ANNOTATIO

De fractis numeris pauca præcipio, cum difficultatis nihil habeant, ſi quis in abſolutorum fractorum calculo probè ſit verſa-

verſatus. *Nam* primo *ad eandem denominationem reducuntur, vt abſoluti. Sint enim hæ fractiones* $\frac{4\,ze+20}{2\,ze+5}$, $\frac{3\,q\;10\,ze}{12}$ *ad eandem denominationem reducendæ. Pro Denominatore nouo duco in ſe denominatores reducendos, & produco* 12 ze + 60. *Pro numeratoribus nouis duco per crucem* 4 ze + 20 *in* 12: & 3 q — 10 ze *in* 12 ze + 5, *& produco* 48 ze + 240, *atq;* 3 ce + 5 q — 50 ze: *quibus ſuppono communem Denominationem, hoc modo* $\frac{48\,ze+240}{12\,ze+60}$, $\frac{3\,ce+5\,q-50\,ze}{12\,ze+60}$.

Secundo, *ſint eadem fractiones addendæ, reduco primò eas ad eandem denominationem; deinde Nominatores reductos addo & conflo* 3 ce + 5 q — 2 ze + 240; *his ſuppono communem denominatorem hoc modo* $\frac{3\,ce+5\,q-2\,ze+240}{12\,ze+60}$.

Tertiò, *ſit hæc fractio* $\frac{4\,ze+20}{2\,ze+5}$, *ex hac* $\frac{3\,q\;10\,ze}{2\;\;2}$, *ſubtrahenda. Reductum hunc* Numeratorem 48 ze + 240, *ſubtraho ex hoc reducto* 3 ce + 5 q — 50 ze *hac methodo,*

3 ce + 5 q — 50 ze + o quo facto, ſuppono reſiduo cō-
+ 48 ze + 240 munem Denominatorem, ſic

3 ce + 5 q — 98 ze — 240 $\frac{3\,ce+5\,q-98\,ze-240}{12\,ze+60}$.

Quartò, *ſi eadem fractiones inter ſe ſint multiplicandæ, duco tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, & produco* $\frac{12\,ce-20\,q-200\,ze}{12\,ze+60}$. *Si vna per alteram ſit diuidenda, inuerto Diuiſorem, ducoq́; tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, producoq́;* $\frac{3\,ce+5\,q-50\,ze}{48\,ze+240}$. *Contingit non rarò, vt integra fractis reperiantur æqualia, aut integris fracta ſint addenda, vel ab illis ſubtrahenda. Quod quando contigit, ſupponatur integris vnitas, & fiant reliqua, vt iam eſt dictum. Exemplum. Sit hæc fractio* $\frac{8\,q+5\,ze-10}{2\,ze+4}$ *æqualis inuentæ huic numero* 24: *aut illi ſit addenda; aut ab illo ſubtrahenda. Suppono integro vnitatem hoc modo,* $\frac{24}{1}$, $\frac{8\,q+5\,ze-10}{2\,ze+4}$. *Pro communi denomi-*

natore

natore duco inferiores in ſe, & produco 2 ze — 4*: pro Numeratoribus verò duco per crucem* 24 *in* 2 ze + 4 : & 8 q + 5 ze — 10, *in* 1, *producóq;* 48 ze + 96, & 8 q + 5 ze — 10 *quibus aut ſuppono communem Denominatorem hoc modo* $\frac{48\text{ze}+96}{2\text{ze}+4}$, $\frac{8\text{q}+5\text{ze}-10}{2\text{ze}+4}$; *aut* 48 ze + 96; & 8 q + 5 ze — 10 *addo, & conflo* $\frac{8\text{q}+53\text{ze}+86}{2\text{ze}+4}$: *aut* 8 q + 5 ze — 10, *ex* 48 ze + 96 *ſubtraho, & reſtant* $\frac{43\text{ze}+106}{2\text{ze}+4}$ 8q.

Articvlvs V.

De radicvm extractione.

Ex ſimplicibus coſsicis radix non aliter extrahitur, atque ex abſolutis. Quando autem quadrata, cubica, aliáue radix extrahenda ſit, character indicat. Ita radix quadrata huius 25 q, eſt 5: cubica huius 27 cꝭ, eſt 3, &c.

Ex compoſitis verò, & diminutis, tunc tantum hactenus vſitata methodo radices extrahi poſſunt, quando exponentes, ſeruant progreſsionem Arithmeticam, hoc eſt, quando characteres duorum extremorum à medio æqualiter diſtant, cuiuſmodi ſunt N°. 1 ze. q 2: & N°. q 2. qq 4: & N°. cꝭ 3. q cꝭ b: & N°. qq 4. qqq 8, &c. Si minimus exponens non ſit o, ſed numerus; erunt characteres abbreuiandi, hoc eſt, minimus exponens erit tum à ſe, tum ab aliis exponentibus ſubtrahendus, & reſiduorum characteres aſſumendi. Vt ſi ſint cꝭ 3. ß 5. ß b 7; ſubtrahenda ſunt 3 ex 3. 5 & 7, & reſtent o. 2. 4: quorum characteres ſunt N. q qq. Nos characterem N. omittimus, eoque numerum abſolutè poſitum affectum intelligimus.

His expoſitis hac arte radices ex compoſitis, & diminutis extrahuntur.

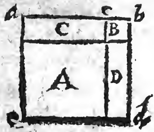
Primò.

uiſiuone. Abiiciuntur enim ex quoto, quoties fieri poteſt, 9: quod reſtat ponitur & in ſuperiore, & in inferiore parte crucis; Et, ſi fuerit extracta radix quadrata, in ſe quadratè ducitur: ſi cubica, cubicè: ſi ſuperſolida, ſuperſolidè, &c. Et ex producto, reſiduoque extractionis, ſi quod fuerit, abiiciuntur rurſus 9, quoties fieri poteſt; & ſi quod, facta abiectione, reſtat, æquale fuerit reſiduo numeri, ex quo facta eſt extractio, probabile eſt operationē bonā eſſe: ſi æquale non fuerit, certū eſt erratum eſſe. Optima probatio eſt, ſi quotus in ſe quadratè, cubicè, biquadratè, &c. multiplicetur, prout radix cubica, quadrata, biquadrata, &c. extracta fuerit, & producto reſiduum, ſi quod fuerit, addatur. Si enim extremum hoc productum æquale fuerit numero, ex quo facta ex extractio, bona eſt operatio.

Annotatio.

Poſſunt plures radices ſimul extrahi; ſed curam hanc aliis relinquimus, cum ad noſtrum inſtitutum parum faciat. Non differt re, ſed modo tantum ratio extrahendarum radicum à nobis propoſita, à vulgari. Eſt tamen meo iudicio facilior, magis expedita, & memoria iuuanda accommodatior.

Demonſtratio extractionum.



Cum quadratum a b d e, componatur ex duobus quadratis A, B, & duobus rectangulis C, D, manifeſtū eſt, cur a c quotus inuētus pro nouo diuiſore duplicādus ſit in extractione radicis quadratæ; nimirū propter duo rectangula C, D. Quod vero

vero in extractione radicis cubicæ, tam quadratũ quoti inuenti, quam ipſemet quotus ſit triplicandus, hinc conſtat. Quia ſi ſuper quadratum a b d e erigatur cubus, erit ille compoſitus ex duobus cubis, quorum latera ſunt ſegmenta, a c, c b; & ex ſex priſmatis, quorum tria pro baſi habent quadratum ſegmenti a c, altitudinem ſegmentum c b. Reliqua tria pro baſi habent quadratum ſegmenti c b; altitudinem ſegmentum a c. Vnde in forma cubi habetur $A\,C + Aq\,3 \text{ in } B + A\,3 \text{ in } Bq + B\,C$. Sequentium radicũ extractiones ex compoſitione formularum ſatis manifeſtæ ſunt. Vt enim ex $A + B$ in $Aq + A\,2 \text{ in } B + Bq$ fit formula cubi: ita ex eodẽ $A + B$ in cubi formulam, fit formula biquadrati; & ex hac in idem $A + B$, fit formula ſuperſolidi primi, &c.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

LIBER SECVNDVS.

DE NVMERO RATIONALI coſſico.

HAnc Arithmeticæ partem, alij Algebram, alij regulam Coſs, alij quadraturam vocant. Algebra deſcendit ab radice גבר, *vt opinor. Coſſa, quam plerique ab Italica voce Coſa deſcendere autumant, ego quoque ab radice Hebraica* בסס, *quæ ſupputare* ɩ *ſignificat, deriuari credo,*

Hæc nobilis Arithmetica tres habet partes. Inuentionem æquationis, Reductionem, & Reſolutionē, licet non omnes ad omnium quæſtionum ſolutionem concurrant. Dicuntur numeri coſſici, etiam denominati, quod à certis characteribus denominentur, vt dignoſci inter ſe poſſint. Characteres ſūt N. ℞ q ȼ, qq ß, &c, ijdem omnino, qui ſupra in radicum tabula poſiti ſunt. Character primus ſignificat numerum abſolutum Secundus radicem. Tertius quadratum. Quartus cubum. Quintus biquadratum. Sextus ſuperſolidum primum Quidam pro ℞ ponunt literam L, quæ latus ſignificat alij ℞. Pro q ponunt quidam ♉, & quadratum vocant zenſum; quadraticubum zenſicubum; biquadratum zenſizenſum. Ponuntur hi characteres poſt numeros, hoc modo 2℞, 2q, 2ȼ, 2qq, 2ß. Primus ſignificat duas radices; Secundus duo quadrata; tertius duos cubos; quartus duo biquadrata, quintus duos ſuperſolidos primos. Vt autem ordine procedamus. Primo trademus elementa, & radicum extractionem. Secundo tres partes regulæ explicabimus. Tertiò, vſum dabimus, & praxim; omnia ſumma, qua poſſumus, breuitate.

Capvt I.

De elementis nvmerorvm coſſicorum.

Notetur alios numeros coſſicos eſſe ſimplices, alios compoſitos, & diminutos. Simplices ſunt, qui nullo connectuntur ſigno. Compoſiti, qui hoc ſigno + connectun-

nectuntur, diminuti, qui hoc — diſiunguntur; ſignificat enim hoc ſignum + plus, hoc — minus.

ARTICVLVS I.

DE SIMPLICIVM COSSICORVM Additione, & Subtractione.

Simplicium Additio, & Subtractio, ſi eoſdem habeant characteres, eodem fiunt modo, quo abſolutorum. Vt ſi 8 ℨ, & 10 ℨ addantur fient 18 ℨ. Si 8 ℨ. ex 18 ℨ ſubtrahãtur reſtabunt 10 ℨ. Si diuerſos habeant characteres adduntur per ſignũ +, Subtrahuntur per —. Vt ſi 6, 8 ℨ, 10 q, & 3 ℭ addenda forent, fieret hæc ſumma 6 + 8 ℨ + 10 q + 3 ℭ. Si vero 6 ex 8 ℨ eſſét ſubtrahenda, relinquerentur 8 ℨ — 6. Si 10 q, ex 3 ℭ relinquerentur 3 ℭ — 10 q.

ARTICVLVS II.

DE MVLTIPLICATIONE, ET DIVIſione coſsicorum ſimplicium.

Quod ad numeros attinet, fiunt multiplicationes, & diuiſiones eo modo, quo abſolutorum. In characteribus autem fit mutatio. Ac primo quidem ſi coſsicus per abſolutum multiplicetur, aut diuidatur, manet idem character. Vt ſi 8 ℨ. per 4 multiplicentur, fient 32 ℨ. Si 10 q per 5, fient 50 q. Si 6 ℭ per 8, fient 48 ℭ. Si vero 32 ℨ per 4 diuidantur, prouenient 8 ℨ. Si 50 q

per 5, prouenient 10 q. Si 48 ce per 8, prouenient 6 ce.

Si coſsici per coſsicos multiplicentur, adduntur eorum exponentes (exponẽtes voco numeros ſupra characteres in ſubiecta tabella deſcriptos) & character ſũmæ exponentiũ additur producto. Vt ſi ducantur 4 ze.

0	1	2	3	4	5	6	7
N	ze	q	ce	q q	ß	q ce	ß b
8	9	10	11	12	13	14	15
q q q	ce ce	q ß	ß c	q q ce	ß d	q ß b	ce ß
16	17	18	19	20			
q q q q	ß e	q ce ce	ß f	q q ß			

in 3 q, fient 12 ce: nam cum characterum ze: & q exponentes ſint 1 & 2, eorumque ſumma 3 ſub ſe habeat characterem ce: fit vt producto 12, apponendus ſit character ce. Eodem modo, ſi 6 q ducantur in 10 ce, producentur 60 ß; ſi 2 ß in 8 q ce; fient 16 ß c, &c.

In diuiſione aduerte, quos characteres gerant diuidendus & diuiſor: eorum exponentes ſume; minorem à maiore ſubtrahe, eritque reſiduum exponens characteris quoto adſcribendi. Vt ſi diuidantur 36 ce per 4 ze, prouenient 9 q. Si 10 ce per 5 q. prouenient 4 ze. Si 40 q q per 5 q, prouenient 8 q. Si occurrat diuiſor maiore affectus charactere, quam diuidendus, fiet diuiſio per lineam interiectam. Vt ſi ſint 8 q per 3 ce diuidenda, fiat id hoc modo, $\frac{8q}{3ce}$.

Arti-

Articvlvs III.

De additione, et svbtractione compoſitorum, & diminutorum.

Si diligenter ad ſigna +, —; & ad duo præcepta attendas, facile quoſuis numeros addes, & quemlibet à quolibet ſubtrahes; nam etiam maiores à minoribus in hac pragmatia ſubtrahi poſſunt, quod quando fit, reſiduum eſt minus quam nihil. Præcepta hæc ſunt.

Primum. *Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando præpoſterè ponuntur, tum enim ſubtrahitur, ſuperior ab inferiore, & ex + fit —; & ex — fit +.*

Secundum. *Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis, & in additione ponitur ſignum maioris numeri; in ſubtractione verò ſuperioris, à quo fit ſubtractio, ſiue maior is ſit, ſiue minor, ſiue æqualis.*

Exemplũ Additionis. Incipimus à ſiniſtra, quã-
quam & à dextra
4qcc + 3ß + 8cc + 10q — 12ze — 20 poſſemus, & di-
7qcc — 6ß — 4cc + 12q — 7ze + 16 cimus 4 & 7 fa-
11qcc — 3ß + 4cc + 22q — 19ze — 4 ciũt 11, quibus
additur chara-
cter qcc, quem 4 & 7 habent.

Quando + 3ß & — 6ß adduntur, fiunt — 3ß; quia cũ habeãt diuerſa ſigna pro additione fit ſubtractio, & retinetur ſignum maioris numeri, iuxta ſecundũ præceptũ. Idem factũ vides in additione + 8cc, & — 4cc, fiunt .n. + 4cc. Idẽ in additione — 20, & + 16; fiunt .n. — 4.

Exem-

Exemplum ſubtractionis. Subtractis 3 qc ex 8 qc. reſtant 5 qc.

8qc — 2 ſs + 3 c + 4 q — 10 ze — 12 + 9 Subtractis verò + 5ſſ ex — 2 ſs, reſtāt — 7 ſs: quia hic
3 qc + 5 ſs + 9 c — 6 q — 15 ze + 7 + 6 ze
5 qc — 7 ſs — 6 c + 10 q + 5 ze — 19 — 6 ze

pro ſubtractione, fit Additio, & retinetur ſignum ſuperioris. Idem fit quando ſubtrahuntur — 6 q ex + 4 q, reſtant enim + 10 q. Item quando + 7 ex — 12 ſubtrahūtur, reſtant n. — 19 Quādo verò + 9 c ex + 3 c ſubtrahuntur, reſtant — 6 c; quia hic numeri præpoſterè ponuntur, maior infra, minor ſupra quod qn̄ fit, ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit —. Idem accidit, qn̄ — 15 ze ex — 10 ze ſubtrahuntur, ſubtrahitur enim ſuperior ab inferiore, & ex — fit +, ſecundum regulam primam. Quando + 6 ze ſubtrahuntur ex 0, ſiue nihilo, reſtant — 6 ze. Si 6 ze haberent ſignum —, reſtarent + 6 ze.

Articulus IV.

De multiplicatione, et diviſione compoſitorum & diminutorum.

Quod ad characteres attinet, eadem regula ſeruatur, quæ de ſimplicibus tradita eſt. De ſignis verò + & — hæc datur regula.

Eadem ſigna ponunt ſignum +; diuerſa —.

Sint 6qq — 5c + 4q + 10ze — 20, per 10 q + 8ze — 12 multiplicanda. Procedo ſecundum regulas, vt ſubiecta habet formula.

6qq

6 qq — 5 ce + 4 q + 10 ze — 20
10 q + 8 ze — 12

60 qze — 50 ſs + 40 qq + 100 ce — 200 q
+ 48 ſs — 40 qq + 32 ce + 80 q — 160 ze
— 72 qq + 60 ce — 48 q — 120 ze + 240

60 q ce — 2 ſs —, 2 qq + 192 ce — 168 q — 280 ze + 240.

In omnes ſuperiores ducuntur primo 10q. Secundò 8ze. tertio — 12. Ductis igitur 10q in 6qq, fiunt 60 q ce: in — 5 ce, fiunt — 50 ſs in + 4q, fiunt + 40qq: in 10 ze, fiunt + 100 ce: ac deniq; in — 20, fiunt — 200 q. Secundò, ductis + 8 ze in 6 qq, fiunt 48 ſs: in — 5 ce, fiunt — 40qq: in + 4q, fiunt + 32 ce: in + 10 ze, fiunt + 80q: ac denique in — 20, fiunt — 160 ze. Tertiò, ductis — 12 in 6qq fiunt — 72qq: in — 5 ce, fiunt + 60 ce: in + 4q, fiunt — 48 q: in + 10 ce, fiunt — 120 ze: & poſtremo in — 20, fiunt + 240. Additio numerorum inter duas lineas incluſorum, fit ſecundum præcepta Additionis compoſitorum, & diminutorum, hoc nota diligenter quod quãdo alter multiplicantium habet +, alter —, productum ſemper habere — quando vero vterque habet +, aut — productum, ſemper habere + iuxta regulam traditam.

Diuiſio, cum non niſi in exemplis arte factis, locum habeat, eam nos aliter non abſoluemus, quam linea inter diuidendum, & diuiſorem interiecta in morem fractorum. Vt ſi 8q + 10 ze. per 2 ze — 20 ſint diuidenda; ita eos collocabimus $\frac{8q + 10\,ze}{2\,ze - 20}$

ANNOTATIO

De fractis numeris pauca præcipio, cum difficultatis nihil habeant, ſi quis in abſolutorum fractorum calculo probè ſit verſa-

verſatus. Nam primo *ad eandem denominationem reducuntur, vt abſoluti. Sint enim hæ fractiones* $\frac{4\,ze+20}{2\,ze+5}$, $\frac{3q\ 10\,ze}{12}$ *ad eandem denominationem reducendæ. Pro Denominatore nouo duco in ſe denominatores reducendos, & produco* 12 ze + 60. *Pro numeratoribus nouis duco per crucem* 4 ze + 20 *in* 12: *&* 3 q — 10 ze *in* 1 ze + 5, *& produco* 48 ze + 240, *atq;* 3 cℓ + 5 q — 50 ze: *quibus ſuppono communem Denominationem, hoc modo* $\frac{48\,ze+240}{12\,ze+60}$, $\frac{3\,c\ell+5q-50\,ze}{12\,ze+60}$.

Secundo, *ſint eadem fractiones addendæ, reduco primò eas ad eandem denominationem; deinde Nominatores reductos addo & conflo* 3 cℓ + 5 q — 2 ze + 240; *his ſuppono communem denominatorem hoc modo* $\frac{3\,c\ell+5q-2\,ze+240}{12\,ze+60}$.

Tertiò, *ſit hæc fractio* $\frac{4\,ze+26}{1\,ze+5}$, *ex hac* $\frac{3q\ 10\,ze}{2}$, *ſubtrahenda. Reductum hunc* Numeratorem 48 ze + 240, *ſubtraho ex hoc reducto* 3 cℓ + 5 q — 50 ze *hac methodo,*

3 cℓ + 5 q — 50 ze + 0 quo facto, ſuppono reſiduo cō-
+ 48 ze + 240 munem Denominatorem, ſic

3 cℓ + 5 q — 98 ze — 240 $\frac{3\,c\ell+5q-98\,ze-240}{12\,ze+60}$.

Quartò, *ſi eadem fractiones inter ſe ſint multiplicandæ, duco tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, & produco* $\frac{12\,c\ell-20q-200\,ze}{12\,ze+60}$. *Si vna per alteram ſit diuidenda, inuerto Diuiſorem, ducoq; tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, producoq;* $\frac{3\,c\ell+5q-50\,ze}{48\,ze+240}$. *Contingit non rarò, vt integra fractis reperiantur æqualia, aut integris fracta ſint addenda, vel ab illis ſubtrahenda. Quod quando contigit, ſupponatur integris vnitas, & fiant reliqua, vt iam eſt dictum. Exemplum. Sit hæc fractio* $\frac{8q+5\,ze-10}{2\,ze+4}$ *æqualis inuenta huic numero* 24: *aut illi ſit addenda; aut ab illo ſubtrahenda. Suppono integro vnitatem hoc modo,* $\frac{24}{1}$, $\frac{8q+5\,ze-10}{2\,ze+4}$. *Pro communi denomi-*

natore

natore duco inferiores in ſe, & produco 2 ℞ — 4: *pro Numeratoribus verò duco per crucem* 24 *in* 2 ℞ + 4: & 8 q + 5 ℞ — 10, *in* 1, *producoq́;* 48 ℞ + 96, & 8 q + 5 ℞ — 10 *quibus aut ſuppono communem Denominatorem hoc modo* $\frac{48\text{℞}+96}{2\text{℞}+4}$, $\frac{8q+5\text{℞}-10}{2\text{℞}+4}$; *aut* 48 ℞ + 96, & 8 q + 5 ℞ — 10 *addo*, & *conflo* $\frac{8q+53\text{℞}+86}{2\text{℞}+4}$: *aut* 8 q + 5 ℞ — 10, *ex* 48 ℞ + 96 *ſubtraho*, & *reſtant* $\frac{43\text{℞}+106}{2\text{℞}+4}$ 8q.

ARTICVLVS V.

DE RADICVM EXTRActione.

Ex ſimplicibus coſsicis radix non aliter extrahitur, atque ex abſolutis. Quando autem quadrata, cubica, aliáue radix extrahenda ſit, character indicat. Ita radix quadrata huius 25 q, eſt 5: cubica huius 27 c, eſt 3, &c.

Ex compoſitis verò, & diminutis, tunc tantum hactenus vſitata methodo radices extrahi poſſunt, quando exponentes, ſeruant progreſsionem Arithmeticam, hoc eſt, quando characteres duorum extremorum à medio æqualiter diſtant, cuiuſmodi ſunt N°. 1 ℞. q 2: & N°. q 2. qq 4: & N°. c 3. qcb: & N°. qq 4. qqq8, &c. Si minimus exponens non ſit 0, ſed numerus; erunt characteres abbreuiandi, hoc eſt, minimus exponens erit tum à ſe, tum ab aliis exponentibus ſubtrahendus, & reſiduorum characteres aſſumendi. Vt ſi ſint c 3. ß 5. ßb 7; ſubtrahenda ſunt 3 ex 3. 5 & 7, & reſtent 0. 2. 4; quorum characteres ſunt N. q qq. Nos characterem N. omittimus, eoque numerum abſolutè poſitum affectum intelligimus.

His expoſitis hac arte radices ex compoſitis, & diminutis extrahuntur.

Primò.

Primò. *Per numerum maximo charactere affectum diuidantur reliqui duo; ſemper enim in hanc extractionem tres tantum numeri concurrunt.*

Secundò. *Diuiſione facta, ad quadratum ſemiſsis numeri radicum, additur, aut ab illo ſubtrahitur, abſolutus, prout ſigno* +, *vel* —, *affectus fuerit.*

Tertiò, *ex hoc aggregato, vel relicto, extrahitur radix quadrata; Cui additur, aut ab illa ſubtrahitur, ſemiſsis numeri radicum, prout radicum numerus ſigno* +, *vel* —, *fuerit affectus.*

Notabis in huiuſmodi extractionibus, quando numerus abſolutus notatur ſigno —, ſemper eſſe duas radices, maiorem, & minorem, illa habetur, ſi radici inuentæ addatur ſemiſsis dictus; hæc ſi ex ſemiſſe radix ſubtrahatur. Intelligo per numerum radicum, illum cuius exponens medius eſt trium numerorum illorum, qualemcunq; characterem gerat. Numeri autem ad extractionem diſpoſiti ſic ſunt.

1 q. 20 ze — 91. exponentes. 2. 1. 0.
1 q. 187 — 6 ze. exponentes. 2. 0. 1.
1 q. 187 + 6 ze. exponentes. 2. 0. 1.
3 q. 54 ze — 216. exponentes. 2. 1. 0. diuiſis per 3 q. pro-
1 q. 4 ze + 60. exponentes. 2. 1. 0. (ueniũt 18 ze — 72
1 qq. 26741 — 100 q. exponẽtes. 4. 0. 2. (ueniũt 30 q + 216
2 qq. 60 q + 432. exponẽtes. 4. 2. 0. diuiſis per 2 qq. pro-
1 ſsb. 9 ſs + 112 cc. exponentes. 7. 5. 3. vel. 4. 2. 0.

Ex quibus, vt radices extrahãtur diuidãtur duo poſtremi numeri per primum, vt factum vides in quarto & 7. exemplis: nam in reliquis, cum vbique primus numerus ſit vnitas diuiſione nulla opus eſt. Diuiſione facta, extrahantur radices, ac primo ex 20 ze — 91. Semiſsis numeri

quadratum 100, ex quo ſublato abſoluto 91, propter ſignum —, reſtant 9; ad cuius radicem quadratam 3, additus ſemiſsis, facit 13; quæ eſt radix maior; minor habetur, ſi radix 3 ex ſemiſſe 10 ſubtrahatur, relinquuntur enim 7. Hæ duæ radices in ſe ductæ, procreant numerum abſolutum 91.

In *ſecundo* exemplo 187—6 ꝝ, additus abſolutus ad quadratum ſemiſsis numeri radicum, propter ſignum +, facit 196. A cuius radice quadrata 14, ſi ſubtrahatur ſemiſsis 3, propter ſignum —, reſtant 11, æſtimatio, ſeu valor vnius 1 ꝝ.

In *quarto* exemplo, facta diuiſione per 3, reſtat extrahenda radix ex 18 ꝝ—72. Ex quadrato ſemiſsis numeri radicum, quod eſt 81, ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſsi parit valores 12, & 6, qui numeri in ſe ducti creant abſolutum 72.

In *ſexto* exemplo, 26741 — 100 q. Ad quadratum ſemiſsis numeri radicum 2500, additus abſolutus, facit 29241; ex cuius radice quadrata 171, ſubtractus ſemiſsis 50, relinquit 121; cuius numeri quadratum cum centuplo ſui, parit numerum abſolutum. Sed nota numerum 121 habere aliam radicem quadratam, quod numerus radicum gerat characterem q. Radix autem illa eſt 11, Huius numeri vnum biquadratum, & 100 quadrata, faciunt numerum abſolutum.

In *vltimo* exemplo 9 ß + 112 ℭ, ſiue (abbreuiatis characteribus) 9 q + 112, ſemiſsis numeri radicum eſt $4\frac{1}{2}$, ſiue $\frac{9}{2}$, eius quadratum $\frac{81}{4}$, ſiue $20\frac{1}{4}$, ad quod additus abſolutus, facit $132\frac{1}{4}$, ſiue $\frac{529}{4}$; radix eſt $\frac{23}{2}$, ſiue $11\frac{1}{2}$, ad quam additus ſemiſsis, facit 16, qui nume-

 rus,

rus, quod numerus radicum ſit 9 q, habet aliam radicem quadratam, 4.

DEMONSTRATIO BREVIS.

Extractionis huius demonſtratio pendet ex quinta ſec. Eucl. quæ numeris accommodata, ſic habet. *Si numerus in duas partes inæquales diuidatur, erit numerus à partibus illis factus, cum quadrato ſemiſsis differentiæ duarum illarum partium, æqualis quadrato dimidij.*

Articvlvs VI.

DE ELEMENTIS SECVNDARVM radicum.

Vt in regula poſitionum interdum vna, interdum duabus, aut pluribus opus eſt poſitionibus: ita & in Algebra. Hactenus enim egimus tantum de radicibus vnius poſitionis, ſiue de radicibus primis. Iam paucis de ſecundis agendum eſt. Quandocunque autem pluribus, quam vna poſitione opus eſt, ſignantur illæ alteræ poſitiones literis, hoc modo; 1 A. 1 B. 1 C. 1 D, &c.

De Additione & Subtractione ſecundarum radicum.

Si characteres fuerint ijdem, tantum adduntur, & ſubtrahuntur numeri. Vt ſi 3 A ad 4 A addenda ſint, fient 7 A. Si 3 A ex 7 A ſubtrahenda, reſtant 4 A.

Si

Si characteres ſint dieurſi, fit addicio per + : ſubtractio per —, Vt ſi addendæ ſint 3 ze ad 4 A, conſtantur 3 ze + 4 A. Si 4 A ſubtrahenda ex 3 ze reſtant 3 ze — 4 A.

DE MVLTIPLICATIONE, ET *Diuiſione.*

Si characteres fuerint ijdem fit multiplicatio, vt in primis radicibus; Nam 4 A in 6 A, faciunt 24 A q. Si diuidenda ſint 24 A q, per 4 A, prouenient 6 A. Si diuerſi fuerint characteres, vterque retinetur in producto. Vt ſi 3 ze ducendæ ſint in 4 A, producentur 12 ze A. Si 12 ze A per 3 ze diuidenda, prouenient 4 A, tollitur enim diuiſoris character.

Radicis extractio fit vt diuiſio. Nam ſi radix quadrata ex 16 A q ſit extrahenda, erit illa 4 A. Si cubica ex 27 A c, erit illa 3 A.

Capvt II.

REGVLAE ALGEBRAE, ET PARTIum eius explicatio.

Regula Algebræ ſic habet. Ponatur pro numero abſcondito 1 ze, quæ iuxta quæſtionis tenorē examinetur, donec æquatio inueniatur. Deinde reducatur, ſi opus ſit, æquatio. Poſtremo per maximum coſſicum diuidatur reliquū æquationis, & proueniet numerus abſcōditus, vel in quoto, vel in aliqua eius radice. quæ qualis ſit, character coſſicus diuiſoris indicat. Ex hac regula apparet tres eſſe eius partes. Inuētionē æqua-

per 5, prouenient 10 q. Si 48 cꝭ per 8, prouenient 6 cꝭ.

Si coſsici per coſsicos multiplicentur, adduntur eorum exponentes (exponẽtes voco numeros ſupra characteres in ſubiecta tabella deſcriptos) & character ſũmæ exponentiũ additur producto. Vt ſi ducantur 4 ze.

0	1	2	3	4	5	6	7
N	ze	q	cꝭ	q q	ß	q cꝭ	ß b
8	9	10	11	12	13	14	15
q q q	cꝭ cꝭ	q ß	ß c	q q cꝭ	ß d	q ß b	cꝭ ß
16	17	18	19	20	in 3 q, fient 12		
q q q q	ß e	q cꝭ cꝭ	ß f	q q ß	cꝭ : nam cum		

characterum ze: & q exponentes ſint 1 & 2, eorumque ſumma 3 ſub ſe habeat characterem cꝭ: fit vt producto 12, apponendus ſit character cꝭ. Eodem modo, ſi 6 q ducantur in 10 cꝭ, producentur 60 ß; ſi 2 ß in 8 q cꝭ; fient 16 ß c, &c.

In diuiſione aduerte, quos characteres gerant diuidendus & diuiſor: eorum exponentes ſume; minorem à maiore ſubtrahe, eritque reſiduum exponens characteris quoto adſcribendi. Vt ſi diuidantur 36 cꝭ per 4 ze, prouenient 9 q. Si 10 cꝭ per 5 q. prouenient 4 ze. Si 40 q q per 5 q, prouenient 8 q. Si occurrat diuiſor maiore affectus charactere, quam diuidendus, fiet diuiſio per lineam interiectam. Vt ſi ſint 8 q per 3 cꝭ diuidenda, fiat id hoc modo, 8q/3cꝭ.

Articvlvs III.

De Additione, et svbtractione compoſitorum, & diminutorum.

Si diligenter ad ſigna +, —; & ad duo præcepta attendas, facile quoſuis numeros addes, & quemlibet à quolibet ſubtrahes; nam etiam maiores à minoribus in hac pragmatia ſubtrahi poſſunt, quod quando fit, reſiduum eſt minus quam nihil. Præcepta hæc ſunt.

Primum. *Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando præpoſterè ponuntur, tum enim ſubtrahitur, ſuperior ab inferiore, & ex + fit —; & ex — fit +.*

Secundum. *Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis, & in additione ponitur ſignum maioris numeri; in ſubtractione verò ſuperioris, à quo fit ſubtractio, ſiue maior is ſit, ſiue minor, ſiue æqualis.*

Exemplũ Additionis. Incipimus à ſiniſtra, quãquam & à dextra poſſemus, & dicimus 4 & 7 faciũt 11, quibus additur character qc, quem 4 & 7 habent.

4 qc + 3 β + 8 c + 10 q — 12 zz — 20
7 qc — 6 β — 4 c + 12 q — 7 zz + 16
11 qc — 3 β + 4 c + 22 q — 19 zz — 4

Quando + 3 β & — 6 β adduntur, fiunt — 3 β; quia cũ habeãt diuerſa ſigna pro additione fit ſubtractio, & retinetur ſignum maioris numeri, iuxta ſecundũ præceptũ. Idem factũ vides in additione + 8 c, & — 4 c, fiunt .n. + 4 c. Idẽ in additione — 20, & + 16; fiunt .n. — 4.

Exem-

Exemplum ſubtractionis. Subtractis 3 qce ex 8 qce. reſtant 5 qce.

8qce — 2 ſs + 3 ce + 4 q — 10 ze — 12 + 9
3qce + 5 ſs + 9 ce — 6 q — 15 ze + 7 + 6 ze
5qce — 7 ſs — 6 ce + 10 q + 5 ze — 19 — 6 ze

Subtractis verò + 5 ſs ex — 2 ſs, reſtãt — 7 ſs: quia hic pro ſubtractione, fit Additio, & retinetur ſignum ſuperioris. Idem fit quando ſubtrahuntur — 6 q ex + 4 q, reſtant enim + 10 q. Item quando + 7 ex — 12 ſubtrahũtur, reſtant n. — 19 Quãdo verò + 9 ce ex + 3 ce ſubtrahuntur, reſtant — 6 ce; quia hic numeri præpoſterè ponuntur, maior infra, minor ſupra quod q̃n fit, ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit —. Idem accidit, q̃n — 15 ze ex — 10 ze ſubtrahuntur, ſubtrahitur enim ſuperior ab inferiore, & ex — fit +, ſecundum regulam primam. Quando + 6 ze ſubtrahuntur ex 0, ſiue nihilo, reſtant — 6 ze. Si 6 ze haberent ſignum —, reſtarent + 6 ze.

Articvlvs IV.

De Mvltiplicatione, et Diviſione compoſitorum & diminutorum.

Quod ad characteres attinet, eadem regula ſeruatur, quæ de ſimplicibus tradita eſt. De ſignis verò + & — hæc datur regula.

Eadem ſigna ponunt ſignum +; diuerſa —.

Sint 6qq — 5 ce + 4 q + 10 ze — 20, per 10 q + 8 ze — 12 multiplicanda. Procedo ſecundum regulas, vt ſubiecta habet formula.

6qq

6 qq — 5 c + 4 q + 10 ze — 20
10 q + 8 ze — 12
____
60 q ze — 50 ſs + 40 qq + 100 c — 200 q
+ 48 ſs — 40 qq + 32 c + 80 q — 160 ze
— 72 qq + 60 c — 48 q — 120 ze + 240
____
60 q c — 2 ſs —, 2 qq + 192 c — 168 q — 280 ze + 240.

In omnes ſuperiores ducuntur primo 10 q. Secundò 8 ze. tertio — 12. Ductis igitur 10 q in 6 qq, fiunt 60 q c: in — 5 c, fiunt — 50 ſs in + 4 q, fiunt + 40 qq: in 10 ze, fiunt + 100 c: ac deniq; in — 20, fiunt — 200 q. Secundò, ductis + 8 ze in 6 qq, fiunt 48 ſs: in — 5 c, fiunt — 40 qq: in + 4 q, fiunt + 32 c: in + 10 ze, fiunt + 80 q: ac denique in — 20, fiunt — 160 ze. Tertiò, ductis — 12 in 6 qq fiunt — 72 qq: in — 5 c, fiunt + 60 c: in + 4 q, fiunt — 48 q: in + 10 c, fiunt — 120 ze: & poſtremo in — 20, fiunt + 240. Additio numerorum inter duas lineas incluſorum, fit ſecundum præcepta Additionis compoſitorum, & diminutorum, hoc nota diligenter quod quãdo alter multiplicantium habet +, alter —, productum ſemper habere — quando vero vterque habet +, aut — productum, ſemper habere + iuxta regulam traditam.

Diuiſio, cum non niſi in exemplis arte factis, locum habeat, eam nos aliter non abſoluemus, quam linea inter diuidendum, & diuiſorem interiecta in morem fractorum. Vt ſi 8 q + 10 ze. per 2 ze — 20 ſint diuidenda; ita eos collocabimus $\frac{8q + 10\,ze}{2\,ze — 20}$

ANNOTATIO

De fractis numeris pauca præcipio, cum difficultatis nihil habeant, ſi quis in abſolutorum fractorum calculo probè ſit verſa-

verſatus. Nam primo *ad eandem denominationem reducuntur, vt abſoluti. Sint enim hæ fractiones* $\frac{4℞+20}{2℞+5}$, $\frac{3q-10℞}{12}$ *ad eandem denominationem reducendæ. Pro Denominatore nouo duco in ſe denominatores reducendos, & produco* 12℞ + 60. *Pro numeratoribus nouis duco per crucem* 4℞ + 20 *in* 12: & 3q — 10℞ *in* 12℞ + 5, *& produco* 48℞ + 240, *atq;* 3C + 5q — 50℞: *quibus ſuppono communem Denominationem, hoc modo* $\frac{48℞+240}{12℞+60}$, $\frac{3C+5q-50℞}{12℞+60}$.

Secundo, *ſint eadem fractiones addendæ, reduco primò eas ad eandem denominationem; deinde Nominatores reductos addo & conflo* 3C + 5q — 2℞ + 240; *his ſuppono communem denominatorem hoc modo* $\frac{3C+5q-2℞+240}{12℞+60}$.

Tertiò, *ſit hæc fractio* $\frac{4℞+26}{12℞+5}$, *ex hac* $\frac{3q\ 10℞}{12}$, *ſubtrahenda. Reductum hunc Numeratorem* 48℞ + 240, *ſubtraho ex hoc reducto* 3C + 5q — 50℞ *hac methodo,*

3C + 5q — 50℞ + 0 quo facto, ſuppono reſiduo cō-

+48℞ + 240 munem Denominatorem, ſic

3C + 5q — 98℞ — 240 $\frac{3C+5q-98℞-240}{12℞+60}$.

Quartò, *ſi eadem fractiones inter ſe ſint multiplicandæ, duco tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, & produco* $\frac{12C-20q-200℞}{12℞+60}$. *Si vna per alteram ſit diuidenda, inuerto Diuiſorem, ducoq; tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, producoq;* $\frac{3C+5q-50℞}{48℞+240}$. *Contingit non rarò, vt integra fractis reperiantur æqualia, aut integris fracta ſint addenda, vel ab illis ſubtrahenda. Quod quando contigit, ſupponatur integris vnitas, & fiant reliqua, vt iam eſt dictum. Exemplum. Sit hæc fractio* $\frac{8q+5℞-10}{2℞+4}$ *æqualis inuenta huic numero* 24: *aut illi ſit addenda; aut ab illo ſubtrahenda. Suppono integro vnitatem hoc modo,* $\frac{24}{1}$, $\frac{8q+5℞-10}{2℞+4}$. *Pro communi denomi-*

natore

natore duco inferiores in ſe, & produco 2 ze — 4: *pro Numeratoribus verò duco per crucem* 24 *in* 2 ze + 4: & 8 q + 5 ze — 10, *in* 1, *producoq́;* 48 ze + 96, & 8 q + 5 ze — 10 *quibus aut ſuppono communem Denominatorem hoc modo* $\frac{48ze+96}{2ze+4}$, $\frac{8q+5ze-10}{2ze+4}$; *aut* 48 ze + 96; & 8 q + 5 ze — 10 *addo*, & *conflo* $\frac{8q+53ze+86}{2ze+4}$: *aut* 8 q + 5 ze — 10, *ex* 48 ze + 96 *ſubtraho*, & *reſtant* $\frac{43ze+106}{2ze+4}$ 8q.

ARTICVLVS V.

DE RADICVM EXTRACtione.

Ex ſimplicibus coſsicis radix non aliter extrahitur, atque ex abſolutis. Quando autem quadrata, cubica, aliáue radix extrahenda ſit, character indicat. Ita radix quadrata huius 25 q, eſt 5: cubica huius 27 cꝭ, eſt 3, &c.

Ex compoſitis verò, & diminutis, tunc tantum hactenus vſitata methodo radices extrahi poſſunt, quando exponentes, ſeruant progreſsionem Arithmeticam, hoc eſt, quando characteres duorum extremorum à medio æqualiter diſtant, cuiuſmodi ſunt N°. 1 ze q 2: & N°. q 2. qq 4: & N°. cꝭ 3. q cꝭ b: & N°. qq 4. qqq 8, &c. Si minimus exponens non ſit 0, ſed numerus; erunt characteres abbreuiandi, hoc eſt, minimus exponens erit tum à ſe, tum ab aliis exponentibus ſubtrahendus, & reſiduorum characteres aſſumendi. Vt ſi ſint cꝭ 3. ß 5. ß b 7; ſubtrahenda ſunt 3 ex 3. 5 & 7, & reſtent 0. 2. 4; quorum characteres ſunt N. q qq. Nos characterem N. omittimus, eoque numerum abſolutè poſitum affectum intelligimus.

His expoſitis hac arte radices ex compoſitis, & diminutis extrahuntur.

Primò,

Primò. *Per numeri m maximo charactere affectum diuidantur reliqui duo; ſemper enim in hanc extractionem tres tantum numeri concurrunt.*

Secundò. *Diuiſione facta, ad quadratum ſemiſsis numeri radicum, additur, aut ab illo ſubtrahitur, abſolutus, prout ſigno +, vel —, affectus fuerit.*

Tertiò, *ex hoc aggregato, vel relicto, extrahitur radix quadrata; Cui additur, aut ab illa ſubtrahitur, ſemiſsis numeri radicum, prout radicum numerus ſigno +, vel —, fuerit affectus.*

Notabis in huiuſmodi extractionibus, quando numerus abſolutus notatur ſigno —, ſemper eſſe duas radices, maiorem, & minorem, illa habetur, ſi radici inuentæ addatur ſemiſsis dictus; hęc ſi ex ſemiſſe radix ſubtrahatur. Intelligo per numerum radicum, illum cuius exponens medius eſt trium numerorum illorum, qualemcunq; characterem gerat. Numeri autem ad extractionem diſpoſiti ſic ſunt.

1 q. 20 ze — 91. exponentes. 2. 1. 0.
1 q. 187 — 6 ze. exponentes. 2. 0. 1.
1 q. 187 + 6 ze. exponentes. 2. 0. 1.
3 q. 54 ze — 216. exponentes. 2. 1. 0. diuiſis per 3 q. pro-
1 q. 4 ze ÷ 60. exponentes. 2. 1. 0. (ueniũt 18 ze — 72
1 qq. 26741 — 100 q. exponẽtes. 4. 0. 2. (ueniũt 30 q + 216
2 qq. 60 q + 432. exponẽtes. 4. 2. 0. diuiſis per 2 qq. pro-
1 ſsb. 9 ſs + 112 cc. exponentes. 7. 5. 3. vel. 4. 2. 0.

Ex quibus, vt radices extrahãtur diuidãtur duo poſtremi numeri per primum, vt factum vides in quarto & 7. exemplis: nam in reliquis, cum vbique primus numerus ſit vnitas diuiſione nulla opus eſt. Diuiſione facta, extrahantur radices, ac primo ex 20 ze — 91. Semiſsis nu-

meri

quadratum 100, ex quo ſublato abſoluto 91, propter ſignum —, reſtant 9; ad cuius radicem quadratam 3, additus ſemiſsis, facit 13; quæ eſt radix maior; minor habetur, ſi radix 3 ex ſemiſſe 10 ſubtrahatur, relinquuntur enim 7. Hæ duæ radices in ſe ductæ, procreant numerum abſolutum 91.

In *ſecundo* exemplo 187 — 6 ze, additus abſolutus ad quadratum ſemiſsis numeri radicum, propter ſignum +, facit 196. A cuius radice quadrata 14, ſi ſubtrahatur ſemiſſis 3, propter ſignum —, reſtant 11, æſtimatio, ſeu valor vnius 1 ze.

In *quarto* exemplo, facta diuiſione per 3, reſtat extrahenda radix ex 18 ze — 72. Ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, quod eſt 81, ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſſi parit valores 12, & 6, qui numeri in ſe ducti creant abſolutum 72.

In *ſexto* exemplo, 26741 — 100 q. Ad quadratum ſemiſſis numeri radicum 2500, additus abſolutus, facit 29241; ex cuius radice quadrata 171, ſubtractus ſemiſſis 50, relinquit 121; cuius numeri quadratum cum centuplo ſui, parit numerum abſolutum. Sed nota numerum 121 habere aliam radicem quadratam, quod numerus radicum gerat characterem q. Radix autem illa eſt 11, Huius numeri vnum biquadratum, & 100 quadrata, faciunt numerum abſolutum.

In *vltimo* exemplo 9ß + 112 ℭ, ſiue (abbreuiatis characteribus) 9 q + 112, ſemiſſis numeri radicum eſt $4\frac{1}{2}$, ſiue $\frac{9}{2}$, eius quadratum $\frac{81}{4}$, ſiue $20\frac{1}{4}$, ad quod additus abſolutus, facit $132\frac{1}{4}$, ſiue $\frac{529}{4}$; radix eſt $\frac{23}{2}$, ſiue $11\frac{1}{2}$, ad quam additus ſemiſſis, facit 16, qui nume-

rus.

rus, quod numerus radicum ſit 9 q, habet aliam radicem quadratam, 4.

DEMONSTRATIO BREVIS.

Extractionis huius demonſtratio pendet ex quinta ſec. Eucl. quæ numeris accommodata, ſic habet. *Si numerus in duas partes inæquales diuidatur, erit numerus à partibus illis factus, cum quadrato ſemiſsis differentiæ duarum illarum partium, æqualis quadrato dimidij.*

Articvlvs VI.

DE ELEMENTIS SECVNDARVM radicum.

Vt in regula poſitionum interdum vna, interdum duabus, aut pluribus opus eſt poſitionibus: ita & in Algebra. Hactenus enim egimus tantum de radicibus vnius poſitionis, ſiue de radicibus primis. Iam paucis de ſecundis agendum eſt. Quandocunque autem pluribus, quam vna poſitione opus eſt, ſignantur illæ alteræ poſitiones literis, hoc modo; 1 A. 1 B. 1 C. 1 D, &c.

De Additione & Subtractione ſecundarum radicum.

Si characteres fuerint ijdem, tantum adduntur, & ſubtrahuntur numeri. Vt ſi 3 A ad 4 A addenda ſint, fient 7 A. Si 3 A ex 7 A ſubtrahenda, reſtant 4 A.

Si

Si characteres ſint dieurſi, fit additio per + : ſubtractio per —, Vt ſi addendæ ſint 3 ze ad 4 A, conſtantur 3 ze + 4 A. Si 4 A ſubtrahenda ex 3 ze reſtant 3 ze — 4 A.

DE MVLTIPLICATIONE, ET Diuiſione.

Si characteres fuerint ijdem fit multiplicatio, vt in primis radicibus; Nam 4 A in 6 A, faciunt 24 A q. Si diuidenda ſint 24 A q, per 4 A, prouenient 6 A. Si diuerſi fuerint characteres, vterque retinetur in producto. Vt ſi 3 ze ducendæ ſint in 4 A, producentur 12 ze A. Si 12 ze A per 3 ze diuidenda, prouenient 4 A, tollitur enim diuiſoris character.

Radicis extractio fit vt diuiſio. Nam ſi radix quadrata ex 16 A q ſit extrahenda, erit illa 4 A. Si cubica ex 27 A c, erit illa 3 A.

Capvt II.

REGVLAE ALGEBRAE, ET PARTIum eius explicatio.

Regula Algebræ ſic habet. Ponatur pro numero abſcondito 1 ze, quæ iuxta quæſtionis tenorē examinetur, donec æquatio inueniatur. Deinde reducatur, ſi opus ſit, æquatio. Poſtremo per maximum coſſicum diuidatur reliquū æquationis, & proueniet numerus abſcōditus, vel in quoto, vel in aliqua eius radice. quæ qualis ſit, character coſſicus diuiſoris indicat. Ex hac regula apparet tres eſſe eius partes. Inuētionē æqua-

tionis, reductionem, & reſolutionem: per reſolutionem intellige diuiſionem, & radicis extractionem.

ANNOTATIO.

Poteſt etiam alius numerus ab vnitate pro radice poni: ſed quando id fit, erit numerus inuentus per illam multiplicandus.

ARTICVLVS I.

DE INVENTIONE AEQVATIONIS.

Inuentio ęquationis eſt, pro numero inueniendo ponere 1 ℞, hoc eſt, vnam radicem; atque cum illa procedere ſecundum quæſtionis ſententiam, non ſecus, ac ſi illa eſſet numerus inueniendus.

• *Exemplum primum.* Inueniatur numerus, qui ſi ducatur in 3, ex producto demantur 24. reſidui $\frac{1}{3}$ ducatur in 5, producantur 20. Pono numerum inueniendum eſſe 1 ℞, cum qua procedo, vt vult quæſtio, hoc eſt duco 1 ℞ in 3, & produco 3 ℞; ex quibus ſubtraho 24, hoc modo 3 ℞ — 24. huius $\frac{1}{3}$, eſt 1 ℞ — 8, hic numerus ductus in 5, producit 5 ℞ — 40; qui numerus iuxta quæſtionis ſenſum, æqualis eſſe debet, huic 20. Inuenta ergo eſt æqualitas inter 5 ℞ — 40, & 20.

• *Secundum exemplum.* Inueniantur tres numeri, hac lege vt primum ſecundus excedat numero hoc 4: ſecundum tertius hoc 6: ſitq; id quod fit ex ductu primi in ſecundum minus eo, quod fit ex primo in tertium, hoc numero 42. Quæro qui ſint numeri? Pono primum eſſe 1 ℞: ergo ſecundus erit 1 ℞ + 4: Tertius 1 ℞ + 10

Pri-

Primus & ſecundus in ſe ducti, & producto additis 42, faciunt 1q + 4 ze + 42. Primus & tertius in ſe ducti, faciunt 1 q + 10ze, qui numeri iuxta quæſtionis ſenſum æquales eſſe debent.

Tertium. Diuidatur numerus 24 in duas partes, vt ſi ducatur maior in 3, minor in 5, addanturque producto minoris 20, maioris 4, ſummæ fiant æquales. Pono maiorem eſſe 1ze: erit ergo minor 24 — 1 ze: maior ductus in 3, facit 3 ze: minor in 5, facit 120 — 5 ze: ſi huic 20, illi addantur 4, erunt hæc 3 ze + 4, his 140 — 5 ze æqualia.

Quartum. Duo habent pecunias, quilibet certam ſummam, ſi primus dat ſecundo 5 aureos, habet ſecundus duplo plus primo: ſi ſecundus dat primo 10, habet primus triplo plus ſecundo. Quid quilibet habet? Pono primum habere 1 ze, qui ſi dat ſecundo 5, retinebit ipſe 1 ze — 5: habet autem ſecundus, facta hac traditione, duplo plus, quam primo relictum eſt: habet ergo ſecundus 2 ze — 10; ex quibus ſi tollas 5, quæ à primo accepit, habebit ipſe 2 ze — 15. Qui ſi det primo 10, retinebit ipſe 2 ze — 25, & habebit primus 1ze + 10, triplo plus ſecundo: ergo ſi ſecundi pecunia relicta, nimirum 2 ze — 25, triplicetur, erunt hæc 1 ze + 10, his 6 ze — 75 æqualia.

Quintum. Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes illæ in ſe ductæ, producant 91. Pono primam partem 1ze: erit ergo ſecunda 20 — 1 ze: Hæ partes in ſe ductæ faciunt 20ze — 1q: quare æqualitas eſt inter 20ze — 1q, & 91. Ex his quinque exemplis facile videt lector, quid ſit inuenire æquationem.

ARTICVLVS II.

DE REDVCTIONE æquationis.

Conſiſtit Reductio in hoc, vt ſi vnius tantum generis adſint Coſsici, tandiu ab vna parte in aliam particulæ transferantur, donec ex vna parte ſit tantum coſſicus, ex altera tantum abſolutus. Si verò plures ſint coſſici, eadem tranſlatio tamdiu fiat, donec ex vna parte ſit ſolus maximus coſsicus cum ſigno + : ex altera parte minor coſſicus cum abſoluto. Quæ translatio fit tum per ſigna +, — hoc modo, ſi ante translationem fuerit + erit poſt illam —: contra ſi ante illam fuerit —, erit poſt illam +: tum his duobus principijs.

Si æqualibus æqualia addas, quæ conſtantur, erunt æqualia; & ſi ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent, erunt æqualia.

Hæc itaque 5 ze—40, his 20, art. præcedente inuenta æqualia, ita reduco. Addo vtrique parti 40, & erunt hæc 5 ze, his 60 æqualia. Nam cum prior pars habeat 40 minus quam 5 ze radices, ſi ab illis tollo 40, addo illis 40: ergo & alteri parti 40 addere debeo, vt partes æquales maneant.

Hæc 1q + 4 ze + 42, his 1q + 10 ze inuenta æqualia, ſic reduco. Tollo ab vtraque parte 1q, & remanent hæc 4 ze + 42, his 10 ze æqualia. *Rurſus* tollo ab vtraque parte 4 ze, & remanent hæc 42, his 6 ze æqualia.

Tertiò hæc 3 ze + 4, his 140 — 5 ze inuenta æqua-

lia,

lia, ita reduco. Addo vtrique parti 5 ze, & erunt hæc 8 ze + 4, his 140 æqualia: iterum tollo ab vtraq; parte 4, & remanent hæc 8 ze his 136 æqualia.

Quartò hæc 1 ze + 10, his 6 ze — 75 æqualia, ſic reduco. Tollo ab vtraque parte 1 ze, & erunt hæc 10, his 5 ze — 75 æqualia: Rurſus addo vtrique parti 75, eruntque hæc 85, his 5 ze æqualia.

Denique hæc 20 ze — 1 q, his 91 inuenta æqualia, ſic reduco. Addo vtrique parti 1 q, & erunt hæc 20 ze, his 91 + 1 q æqualia: Iterum demo ab vtraque parte 91, remanebuntque hæc 20 ze — 91, huic 1 q æqualia. *Ex dictis lector facilè intelliget, quod ſignum + ſubtrabat, ſignum — addat.*

ARTICVLVS III.

DE RESOLVTIONE SIVE DIVISIone & radicis extractione.

Diuiſio in hoc conſiſtit, vt, ſi facta reductione, ab vna parte ſit abſolutus, ab altera coſſicus, abſolutus per coſſicum, abiecto charactere, diuidatur: erit .n. id quod prouenit, numerus quæſitus. Vt ſi in prima reductione diuidantur 60 per 5 ze, proueniunt 12, numerus, qui in prima quæſtione art. 1. erat propoſitus.

Si in ſecunda quæſtione 42 per 6 ze diuidantur, prouenient 7, qui eſt numerus primus: erit ergo ſecundus 21. tertius 17.

Si in tertia, 136 per 8 ze diuidantur, prouenient 17, numerus maior: erit igitur minor 7.

Si in quarta diuidantur, 85 per 5 ze, prouenient 17, pecunia primi: erit ergo iuxta quæſtionis ſenſum, pecunia ſecundi 19.

In quinta quia ab vna parte eſt coſsicus maximus, ab altera minor coſsicus cum abſoluto, debet vterq;, tam abſolutus, quam minor coſſicus, per maximum coſsicũ diuidi, & ex producto radix quadrata extrahi.

Diuiſis igitur 20 ze —91 per 19, proueniunt 20 ze —91. Huius radices per ſupra dicta inuenientur, 13. 7. Semiſsis enim numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100; ex quo ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix quadrata 3, addita, & ſubtracta ſemiſsi numeri radicum, manifeſtas facit partes 13, & 7: hæ enim partes in ſe ductæ, progignunt 91; vt quæſtio quinta volebat.

ANNOTATIO I.

Ex tribus regulæ coſsicæ partibus, hactenus explicatis difficillima eſt inuentio æquationis, præterquam enim quod iudicium requirit, cognitione quoq; tum Geometriæ, & Arithmeticæ; tum multarum aliarum artium cum primis opus habet.

ANNOTATIO II.

Aduerto diligenter, quando plures numeri proponuntur inueniendi, ſemper illũ primo inueniri, pro quo ponitur 1 ze. Exempli cauſa in hac quæſt. Tres diuidunt inter ſe 100 aureos ea lege, vt ſecundus 4 amplius capiat primo; tertius 11. amplius ſecundo, quæro quid quilibet capiat? Si pono 1 ze pro primo, inuenio

uenio pecuniam primi, Si pro ſecundo, inuenio ſecundi. Si pro tertio, tertij. Ponamus ergo primum habere 1 ze: *habet ergo ſecundus* 1 ze + 4: *tertius* 1 ze + 15. *Summa omnium* 3 ze + 19, *æqualis eſt numero* 100. *Si ab vtraque parte tollo* 19; *erunt* 3 ze, & 81 *æqualia. Diuiſis igitur* 81, *per* 3 ze, *proueniunt* 27, *pecunia primi: habet ergo ſecundus* 31; *tertius* 42, *qui numeri ſimul faciunt* 100.

Ponamus iam ſecundum habere 1 ze: *habet ergo primus* 1 ze — 4, *tertius* 1 ze + 11. *Summa* 3 ze + 7 *eſt æqualis* 100: & *ſi ab vtraque parte tollantur* 7: *erunt hæc* 3 ze, *his* 93 *æqualia. Diuiſis igitur* 93 *per* 3 ze *proueniunt* 31 *pecunia ſecundi.*

Ponamus vltimo tertium habere 1 ze, *habebit ergo ſecundus* 1 ze — 11; *primus* 1 ze — 15: *ſumma* 3 ze — 26, *eſt æqualis* 100, *additis igitur vtrique parti* 26 *erunt hæc* 3 ze, *his* 126 *æqualia. Igitur diuiſis* 126 *per* 3 ze, *proueniunt* 42, *pecunia tertij. Vides ergo, quod in prima poſitione,* 1 ze *valeat* 27, *in ſecunda* 31; *in tertia* 42, *ſemperq; illum numerum inueniri pro quo ponitur* 1 ze. Poſſent hæc ſufficere: ſed quia regula hæc, vt pleraque alia, exemplis ſolet clareſcere, pergimus porrò.

CAPVT III.

DE PRAXI NVMERORVM coſsicorum.

In hoc capite Sex genera exemplorũ proponemus. Primi generis erũt, in quibus, vel diuiſor eſt vnitas vel nulla reductione opus eſt. Secũdi generis sũt, quæ

Primò. *Per numeri in maximo charactere affectum diuidantur reliqui duo; ſemper enim in hanc extractionem tres tantum numeri concurrunt.*

Secundò. *Diuiſione facta, ad quadratum ſemiſsis numeri radicum, additur, aut ab illo ſubtrahitur, abſolutus, prout ſigno* +, *vel* —, *affectus fuerit.*

Tertiò, *ex hoc aggregato, vel relicto, extrahitur radix quadrata; Cui additur, aut ab illa ſubtrahitur, ſemiſsis numeri radicum, prout radicum numerus ſigno* +, *vel* —, *fuerit affectus.*

Notabis in huiuſmodi extractionibus, quando numerus abſolutus notatur ſigno —, ſemper eſſe duas radices, maiorem, & minorem, illa habetur, ſi radici inuentæ addatur ſemiſſis dictus; hęc ſi ex ſemiſſe radix ſubtrahatur. Intelligo per numerum radicum, illum cuius exponens medius eſt trium numerorum illorum, qualemcunq; characterem gerat. Numeri autem ad extractionem diſpoſiti ſic ſunt.

1 q. 20 ze — 91. exponentes. 2. 1. 0.
1 q. 187 — 6 ze. exponentes. 2. 0. 1.
1 q. 187 + 6 ze. exponentes. 2. 0. 1.
3 q. 54 ze — 216. exponentes. 2. 1. 0. diuiſis per 3 q. pro-
1 q. 4 ze + 60. exponentes. 2. 1. 0. (ueniũt 18 ze — 72
1 qq. 26741 — 100 q. exponẽtes. 4. 0. 2. (ueniũt 30 q + 216
2 qq. 60 q + 432. exponẽtes. 4. 2. 0. diuiſis per 2 qq. pro-
1 ſsb. 9 ſs + 112 ce. exponentes. 7. 5. 3. vel. 4. 2. 0.

Ex quibus, vt radices extrahãtur diuidãtur duo poſtremi numeri per primum, vt factum vides in quarto & 7. exemplis: nam in reliquis, cum vbique primus numerus ſit vnitas diuiſione nulla opus eſt. Diuiſione facta, extrahantur radices, ac primo ex 20 ze — 91 Semiſsis numeri

meri

quadratum 100,ex quo ſublato abſoluto 91,propter ſignum —,reſtant 9; ad cuius radicem quadratam 3, additus ſemiſsis, facit 13; quæ eſt radix maior; minor habetur,ſi radix 3 ex ſemiſſe 10 ſubtrahatur, relinquuntur enim 7. Hæ duæ radices in ſe ductæ, procreant numerum abſolutum 91.

In *ſecundo* exemplo 187—6 ze,additus abſolutus ad quadratum ſemiſsis numeri radicum, propter ſignum +, facit 196. A cuius radice quadrata 14, ſi ſubtrahatur ſemiſſis 3, propter ſignum —, reſtant 11,æſtimatio, ſeu valor vnius 1 ze.

In *quarto* exemplo,facta diuiſione per 3,reſtat extrahenda radix ex 18 ze—72. Ex quadrato ſemiſſis numeri radicum,quod eſt 81,ſubtractus abſolutus propter ſignum—,relinquit 9, cuius radix 3 addita; & ſubtracta ſemiſſi parit valores 12, & 6, qui numeri in ſe ducti creant abſolutum 72.

In *ſexto* exemplo,26741 — 100 q. Ad quadratum ſemiſſis numeri radicum 2500,additus abſolutus, facit 29241; ex cuius radice quadrata 171,ſubtractus ſemiſſis 50,relinquit 121;cuius numeri quadratum cum centuplo ſui,parit numerum abſolutum. Sed nota numerum 121 habere aliam radicem quadratam , quod numerus radicum gerat characterem q. Radix autem illa eſt 11,Huius numeri vnum biquadratum, & 100 quadrata,faciunt numerum abſolutum.

In *vltimo* exemplo 9ß + 112 ℭ , ſiue (abbreuiatis characteribus) 9 q + 112,ſemiſſis numeri radicum eſt $4\frac{1}{2}$, ſiue $\frac{9}{2}$,eius quadratum $\frac{81}{4}$, ſiue $20\frac{1}{4}$, ad quod additus abſolutus, facit $132\frac{1}{4}$, ſiue $\frac{529}{4}$; radix eſt $\frac{23}{2}$, ſiue $11\frac{1}{2}$, ad quam additus ſemiſſis, facit 16,qui nume-

 rus,

rus, quod numerus radicum ſit 9 q , habet aliam radicem quadratam, 4.

DEMONSTRATIO BREVIS.

Extractionis huius demonſtratio pendet ex quinta ſec. Eucl. quæ numeris accommodata, ſic habet. *Si numerus in duas partes inæquales diuidatur, erit numerus à partibus illis factus, cum quadrato ſemiſsis differentiæ duarum illarum partium, æqualis quadrato dimidij.*

Articvlvs VI.

DE ELEMENTIS SECVNDARVM radicum.

Vt in regula poſitionum interdum vna, interdum duabus, aut pluribus opus eſt poſitionibus: ita & in Algebra. Hactenus enim egimus tantum de radicibus vnius poſitionis, ſiue de radicibus primis. Iam paucis de ſecundis agendum eſt. Quandocunque autem pluribus, quam vna poſitione opus eſt, ſignantur illæ alteræ poſitiones literis, hoc modo; 1 A. 1 B. 1 C. 1 D, &c.

De Additione & Subtractione ſecundarum radicum.

Si characteres fuerint ijdem, tantum adduntur, & ſubtrahuntur numeri. Vt ſi 3 A ad 4 A addenda ſint, fient 7 A. Si 3 A ex 7 A ſubtrahenda, reſtant 4 A.

Si

Si characteres ſint dieurſi, fit additio per + : ſubtractio per —, Vt ſi addendæ ſint 3 ze ad 4 A, conſlantur 3 ze + 4 A. Si 4 A ſubtrahenda ex 3 ze reſtant 3 ze — 4 A.

DE MVLTIPLICATIONE, ET Diuiſione.

Si characteres fuerint ijdem fit multiplicatio, vt in primis radicibus; Nam 4 A in 6 A, faciunt 24 A q. Si diuidenda ſint 24 A q, per 4 A, prouenient 6 A. Si diuerſi fuerint characteres, vterque retinetur in producto. Vt ſi 3 ze ducendæ ſint in 4 A, producentur 12 ze A. Si 12 ze A per 3 ze diuidenda, prouenient 4 A, tollitur enim diuiſoris character.

Radicis extractio fit vt diuiſio. Nam ſi radix quadrata ex 16 A q ſit extrahenda, erit illa 4 A. Si cubica ex 27 A c, erit illa 3 A.

CAPVT II.

REGVLAE ALGEBRAE, ET PARTIum eius explicatio.

Regula Algebræ ſic habet. Ponatur pro numero abſcondito 1 ze, quæ iuxta quæſtionis tenorē examinetur, donec æquatio inueniatur. Deinde reducatur, ſi opus ſit, æquatio. Poſtremo per maximum coſſicum diuidatur reliquū æquationis, & proueniet numerus abſcōditus, vel in quoto, vel in aliqua eius radice. quæ qualis ſit, character coſſicus diuiſoris indicat. Ex hac regula apparet tres eſſe eius partes, Inuētionē æqua-

tionis,reductionem, & reſolutionem : per reſolutionem intellige diuiſionem, & radicis extractionem.

ANNOTATIO.

Poteſt etiam alius numerus ab vnitate pro radice poni: ſed quando id fit, erit numerus inuentus per illam multiplicandus.

ARTICVLVS I.

DE INVENTIONE AEQVATIONIS.

Inuentio ęquationis eſt, pro numero inueniendo ponere 1 ze, hoc eſt, vnam radicem; atque cum illa procedere ſecundum quæſtionis ſententiam, non ſecus, ac ſi illa eſſet numerus inueniendus.

• *Exemplum primum.* Inueniatur numerus, qui ſi ducatur in 3, ex producto demantur 24. reſidui $\frac{1}{3}$ ducatur in 5, producantur 20. Pono numerum inueniendum eſſe 1 ze, cum qua procedo, vt vult quæſtio, hoc eſt duco 1 ze in 3, & produco 3 ze; ex quibus ſubtraho 24, hoc modo 3 ze — 24. huius $\frac{1}{3}$, eſt 1 ze — 8, hic numerus ductus in 5, producit 5 ze — 40; qui numerus iuxta quæſtionis ſenſum, æqualis eſſe debet, huic 20. Inuenta ergo eſt æqualitas inter 5 ze — 40, & 20.

• *Secundum exemplum.* Inueniantur tres numeri, hac lege vt primum ſecundus excedat numero hoc 4: ſecundum tertius hoc 6: ſitq; id quod fit ex ductu primi in ſecundum minus eo, quod fit ex primo in tertium, hoc numero 42. Quæro qui ſint numeri? Pono primum eſſe 1 ze; ergo ſecundus erit 1 ze + 4: Tertius 1 ze + 10

Pri-

Primus & ſecundus in ſe ducti, & producto additis 42, faciunt 1q + 4 ze + 42. Primus & tertius in ſe ducti, faciunt 1 q + 10ze, qui numeri iuxta quæſtionis ſenſum æquales eſſe debent.

Tertium. Diuidatur numerus 24 in duas partes, vt ſi ducatur maior in 3, minor in 5, addanturque producto minoris 20, maioris 4, ſummæ fiant æquales. Pono maiorem eſſe 1ze: erit ergo minor 24 — 1 ze: maior ductus in 3, facit 3 ze: minor in 5, facit 120 — 5 ze: ſi huic 20, illi addantur 4, erunt hæc 3 ze + 4, his 140 — 5 ze æqualia.

Quartum. Duo habent pecunias, quilibet certam ſummam, ſi primus dat ſecundo 5 aureos, habet ſecundus duplo plus primo: ſi ſecundus dat primo 10, habet primus triplo plus ſecundo. Quid quilibet habet? Pono primum habere 1 ze, qui ſi dat ſecundo 5, retinebit ipſe 1 ze — 5: habet autem ſecundus, facta hac traditione, duplo plus, quam primo relictum eſt: habet ergo ſecundus 2 ze — 10; ex quibus ſi tollas 5, quæ à primo accepit, habebit ipſe 2 ze — 15. Qui ſi det primo 10, retinebit ipſe 2 ze — 25, & habebit primus 1ze + 10, triplo plus ſecundo: ergo ſi ſecundi pecunia relicta, nimirum 2 ze — 25, triplicetur, erunt hæc 1 ze + 10, his 6 ze — 75 æqualia.

Quintum. Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes illæ in ſe ductæ, producant 91. Pono primam partem 1ze: erit ergo ſecunda 20 — 1 ze: Hæ partes in ſe ductæ faciunt 20ze — 1q: quare æqualitas eſt inter 20 ze — 1q, & 91. Ex his quinque exemplis facile videt lector, quid ſit inuenire æquationem.

ARTICVLVS II.

DE REDVCTIONE æquationis.

Conſiſtit Reductio in hoc, vt ſi vnius tantum generis adſint Coſsici, tandiu ab vna parte in aliam particulæ transferantur, donec ex vna parte ſit tantum coſſicus, ex altera tantum abſolutus. Si verò plures ſint coſſici, eadem tranſlatio tamdiu fiat, donec ex vna parte ſit ſolus maximus coſsicus cum ſigno + : ex altera parte minor coſſicus cum abſoluto. Quæ translatio fit tum per ſigna +, — hoc modo, ſi ante translationem fuerit + erit poſt illam —: contra ſi ante illam fuerit —, erit poſt illam +: tum his duobus principijs.

Si æqualibus æqualia addas, quæ conſtantur, erunt æqualia; & ſi ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent, erunt æqualia.

Hæc itaque 5 ze—40, his 20, art, præcedente inuenta æqualia, ita reduco. Addo vtrique parti 40, & erunt hæc 5 ze, his 60 æqualia. Nam cum prior pars habeat 40 minus quam 5 ze radices, ſi ab illis tollo 40, addo illis 40: ergo & alteri parti 40 addere debeo, vt partes æquales maneant.

Hæc 1q + 4 ze + 42, his 1q + 10 ze inuenta æqualia, ſic reduco. Tollo ab vtraque parte 1q, & remanent hæc 4 ze + 42, his 10 ze æqualia. *Rurſus* tollo ab vtraque parte 4 ze, & remanent hæc 42, his 6 ze æqualia.

Tertiò hæc 3 ze + 4, his 140 — 5 ze inuenta æqualia,

lia, ita reduco. Addo vtrique parti 5 ze, & erunt hæc 8 ze + 4, his 140 æqualia: iterum tollo ab vtraq; parte 4, & remanent hæc 8 ze his 136 æqualia.

Quartò hæc 1 ze + 10, his 6 ze — 75 æqualia, ſic reduco. Tollo ab vtraque parte 1 ze, & erunt hæc 10, his 5 ze — 75 æqualia: Rurſus addo vtrique parti 75, eruntque hæc 85, his 5 ze æqualia.

Denique hæc 20 ze — 1q, his 91 inuenta æqualia, ſic reduco. Addo vtrique parti 1 q, & erunt hæc 20 ze, his 91 + 1q æqualia: Iterum demo ab vtraque parte 91, remanebuntque hæc 20 ze — 91, huic 1 q æqualia. ***Ex dictis lector facilè intelliget, quod ſignum + ſubtrahat, ſignum — addat.***

ARTICVLVS III.

DE RESOLVTIONE SIVE DIVISIone & radicis extractione.

Diuiſio in hoc conſiſtit, vt, ſi facta reductione, ab vna parte ſit abſolutus, ab altera coſſicus, abſolutus per coſſicum, abiecto charactere, diuidatur: erit .n. id quod prouenit, numerus quæſitus. Vt ſi in prima reductione diuidantur 60 per 5 ze, proueniunt 12, numerus, qui in prima quæſtione art. 1. erat propoſitus.

Si in ſecunda quæſtione 42 per 6 ze diuidantur, prouenient 7, qui eſt numerus primus: erit ergo ſecundus 11, tertius 17.

Si in tertia, 136 per 8 ze diuidantur, prouenient 17, numerus maior: erit igitur minor 7.

Si in quarta diuidantur, 85 per 5 ze, prouenient 17, pecunia primi: erit ergo iuxta quæſtionis ſenſum, pecunia ſecundi 19.

In quinta quia ab vna parte eſt coſsicus maximus, ab altera minor coſsicus cum abſoluto, debet vterq;, tam abſolutus, quam minor coſſicus, per maximum coſsicũ diuidi, & ex producto radix quadrata extrahi.

Diuiſis igitur 20 ze —91 per 1q, proueniunt 20 ze —91. Huius radices per ſupra dicta inuenientur, 13. 7. Semiſsis enim numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100; ex quo ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix quadrata 3, addita, & ſubtracta ſemiſsi numeri radicum, manifeſtas facit partes 13, & 7: hæ enim partes in ſe ductæ, progignunt 91; vt quæſtio quinta volebat.

ANNOTATIO I.

Ex tribus regulæ coſsicæ partibus, hactenus explicatis difficillima eſt inuentio æquationis, præterquam enim quod iudicium requirit, cognitione quoq; tum Geometriæ, & Arithmeticæ; tum multarum aliarum artium cum primis opus habet.

ANNOTATIO II.

Aduerte diligenter, quando plures numeri proponuntur inueniendi, ſemper illũ primo inueniri, pro quo ponitur 1 ze. *Exempli cauſa in hac quæſt. Tres diuidunt inter ſe* 100 *aureos ea lege, vt ſecundus* 4 *amplius capiat primo; tertius* 11. *amplius ſecundo, quæro quid quilibet capiat? Si pono* 1 ze *pro primo, inuenio*

uenio pecuniam primi, Si pro ſecundo, inuenio ſecundi. Si pro tertio, tertij. Ponamus ergo primum habere 1 ze: *habet ergo ſecundus* 1 ze + 4: *tertius* 1 ze + 15. *Summa omnium* 3 ze + 19, *æqualis eſt numero* 100. *Si ab vtraque parte tollo* 19; *erunt* 3 ze, *&* 81 *æqualia. Diuiſis igitur* 81, *per* 3 ze, *proueniunt* 27, *pecunia primi: habet ergo ſecundus* 31; *tertius* 42, *qui numeri ſimul faciunt* 100.

Ponamus iam ſecundum habere 1 ze; *habet ergo primus* 1 ze — 4, *tertius* 1 ze + 11. *Summa* 3 ze + 7 *eſt æqualis* 100: *& ſi ab vtraque parte tollantur* 7: *erunt hæc* 3 ze, *his* 93 *æqualia. Diuiſis igitur* 93 *per* 3 ze *proueniunt* 31 *pecunia ſecundi.*

Ponamus vltimo tertium habere 1 ze, *habebit ergo ſecundus* 1 ze — 11; *primus* 1 ze — 15: *ſumma* 3 ze — 26, *eſt æqualis* 100, *additis igitur vtrique parti* 26 *erunt hæc* 3 ze, *his* 126 *æqualia. Igitur diuiſis* 126 *per* 3 ze, *proueniunt* 42, *pecunia tertij. Vides ergo, quod in prima poſitione,* 1 ze *valeat* 27, *in ſecunda* 31; *in tertia* 42, *ſemperq; illum numerum inueniri pro quo ponitur* 1 ze. Poſſent hæc ſufficere: ſed quia regula hæc, vt pleraque alia, exemplis ſolet clareſcere, pergimus porrò.

CAPVT III.

DE PRAXI NVMERORVM coſſicorum.

In hoc capite Sex genera exemplorũ proponemus. Primi generis erũt, in quibus, vel diuiſor eſt vnitas vel nulla reductione opus eſt. Secũdi generis sũt, quæ

Sola diuiſio ſoluit. Tertij quæ ſoluit extractio radicis. Quarti, in quo ſecundæ radices occurrunt. Quinti, ſunt exempla geometrica. Sexti, in quo contractè propoſita, abſtractè ſoluuntur.

ARTICVLVS I.

EXEMPLA, IN QVIBVS VEL DIuiſor eſt vnitas, vel nulla reductione opus eſt.

Exemplum primum. Detur numerus, cui ſi addantur 11, & ab eodem ſubtrahantur 7, prior ſit duplus poſterioris. Sit numerus ille 1 ze: cui ſi addo 11: & ab eodem ſubtraho 7, fiunt 1 ze + 11: reſtant 1 ze — 7. Cum ergo iam numerus prior poſterioris duplus ſit, ſi duplicetur ſecundus, erunt hæc 1 ze + 11, his 2 ze — 14 æqualia. Et ſi ab vtraque parte tollatur 1 ze, hæc 11, his 1 ze — 14. Rurſus ſi vtrique parti addantur 14, hæc 25, huic 1 ze: numerus igitur quæſitus, eſt 25: nam 25 diuiſa per 1 ze, reddunt 25.

Secundum exemplum. Dentur duo numeri differentes ſeptenario, hac lege; vt ſi minor ducatur in 2, & producto addantur 3: maior in 3, & producto addatur 1, fiat maior duplus minoris. Sit minor 1 ze: erit igitur maior 1 ze + 7. Si minor ducatur in 2. & producto addantur 3, fient 2 ze + 3: Si maior ducatur in 3; & producto addatur 1, fient 3 ze + 22. Cum ergo iam maior duplus ſit minoris, ſi minor duplicetur, erunt hæc 4 ze + 6, his 3 ze + 22 æqualia. Si igitur ab vtraq; parte tollan-

tollantur 3 ze, erũt hæc 1 ze + 6, his 22 æqualia: ſi rurſus ab vtraq; parte tollantur 6 erit & 1 ze, æqualis hiſce 16. Numerus ergo quæſitus minor, eſt 16, igitur maior 23.

Tertium. Detur numerus ex cuius $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ſi tollantur 80, reſtent 100. Eſto numerus 1 ze: dictæ illius partes ſunt $\frac{1}{2}$ ze, $\frac{1}{3}$ ze, $\frac{1}{6}$ ze; ſũma 1 ze, ex qua ſi ſubtraham 80, reſtant 1 ze — 80 æqualia hiſce 100. Si igitur vtriq; parti addantur 80, erit & 1 ze æqualis hiſce 180: igitur 180 eſt numerus quæſitus.

Quartum. Detur numerus, ex cuius $\frac{1}{4}$, ſi ſubtrahantur 13, reſiduũ ducatur in 4, proueniunt 48. Eſto numerus 1 ze, ex cuius $\frac{1}{4}$, ſi tollo 13, reſtant $\frac{1}{4}$ ze — 13: his ductis in 4, proueniunt 1 ze — 52, æqualia his 48. Si igitur vtrique parti addantur 52, erit & 1 ze, æqualis 100: ergo 100 eſt numerus quæſitus.

Quintum. Duo habent pecunias. Primus dicit ſecundo, ſi mihi dares vnum aureum, haberem quantũ tu: infert ſecundus, ſi mihi dares tu vnum, haberem duplo plus te: quæro quantum quilibet habeat? Pono primum habere 1 ze, cui ſi ſecundus vnum dederit, habebit 1 ze + 1. Cum ergo inter 1 ze + 1, & pecuniam reſiduam ſecundi, ponatur æqualitas, habebit ſecundus 1 ze + 2: cui ſi primus dederit vnũ, retinebit primus 1 ze — 1, habebit ſecundus 1 ze + 3. Cùm ergo iam pecunia ſecundi ſit dupla primi, ſi quod primus retinet duplicetur, erunt hæc 2 ze — 2, his 1 ze + 3 æqualia: & ſi vtriq; parti addantur 2, hæc 2 ze, his 1 ze + 5. Rurſus ſi ab vtraque parte tollatur 1 ze: hæc 5, huic 1 ze: primus ergo, qui ponebatur habere 1 ze, habet 5; qui ſi dederit ſecundo 1, retinebit ipſe 4 habebit ſecundus 8, vnde ſi tollatur 1, reſtabunt 7, pecunia ſecundi.

Digitized by Google

ANNOTATIO.

Hic notetur mirabilis numerorum natura. Nam ſi alter alteri det 8, reperietur pecunia primi 40, ſecundi 56, quantum nimirum creatur ex ductu 8 in 5, & 7. Idem verum eſt in quemcunque numerum ducantur 5 & 7.

Sextum. Sunt duo numeri 20. & 25, & inueniendi ſunt alij duo, in quadrupla proportione, vt ſi maior ad 25, minor addatur ad 20, conflati numeri habeant triplam proportionem. Ponatur primus 1 ze: erit ergo ſecundus 4 ze, qui additi prioribus eo quo diximus modo, facient 20 + 1 ze, & 25 + 4 ze. Hi numeri cum ponantur eſſe in tripla proportione, ducatur minor, nempe 20 + 1 ze, in 3, eruntq; hi 60 + 3 ze æquales his 25 + 4 ze. Si igitur ab vtraque parte demantur 3 ze, erũt & hi 60, his 25 + 1 ze æquales: ſi rurſus ab vtraq; parte tollantur 25, erunt & hi 35 æquales huic 1 ze. Numerus ergo minor, qui ponebatur 1 ze, erit 35, cuius quadruplum 140; erit alter 20 & 35 faciunt 55; at 25, & 140 faciunt 165, qui numerus cum ſit triplus numeri 55, benè operati ſumus.

Septimum. Detur numerus, ex quo ſi tollantur 3, reſidui $\frac{1}{3}$ addantur 7; ſumma hæc ducatur in 3, rurſuſque ex producto tollantur 18, reſtent 21. Eſto numerus 1 ze, ex quo ſi tollantur 3, reſtant 1 ze — 3: tertia pars eſt $\frac{1\,ze - 3}{3}$, cui ſi 7, addantur, fiunt $\frac{1\,ze + 18}{3}$, hæc in 3 ducta faciunt 1 ze + 18: hinc ſi tollantur 18, reſtat 1 ze, æqualis huic 21: ergo 21 eſt numerus quæſitus.

Octauum. Detur numerus, cui ſi addam 7, & ex eodem demam 11: atque ex conflati, & reſidui ſumma tollam numerum ipſum, reſiduoque huic addam 4, fi-

ant

ant 27. Eſto numerus 1 ze, cui ſi addo 7, & ab eodem ſubtraho 11, & vtrumque coniungo, efficio 2 + — 4: hinc ſi tollo 1 ze numerum ipſum, reſtant 1 ze — 4, quibus ſi addo 4, efficio 1 ze, æqualem hiſce 27: ergo 27 eſt numerus quæſitus. Nam ſi illi addo 7, conflo 34; ſi adimo 11, relinquuntur 16: ſumma 34, & 16, eſt 50, ex qua ſi tollo 27, reſtant 23, his ſi addo 4, conflo 27, numerum deſideratum.

Nonum. Dentur duo numeri, quorum differentia ſit 12 hac lege; vt ſi quartam partem ſummæ illorum ducam in 2, & ex producto tollam 6, relinquantur 20. Sit numerus minor 1 ze: erit igitur maior 1 ze + 12. Sūma vtriuſq; eſt 2 ze + 12; quarta pars, $\frac{1}{2}$ ze + 3, quæ ducta in 2, facit 1 ze + 6: Vnde ſi demam 6, reſtat 1 ze, æqualis 20. Ergo 20 eſt numerus quæſitus minor: ergo maior 32: ſumma vtriuſque 52, quarta pars 13 ducta in 2, facit 26. Vnde ſi tollam 6, reſtant 20.

Decimum. Progreſsionis Arithmeticæ primus terminus eſt 7, vltimus 40, ſumma omnium 282, quæro quis ſit numerus terminorum? Pono eſſe 1 ze: ſumma primi, & vltimi eſt 47, quæ in $\frac{1}{2}$ ze, ſemiſſem numeri terminorum ducta, facit $\frac{47}{2\,ze}$: ergo 282, & $\frac{47}{2\,ze}$ ſunt æqualia. Facta igitur diuiſione, erit numerus terminorum 12. Differentia progreſsionis, reperitur per regulam tertiam. Progreſſ. Arith.

Vndecimum. Quidam mercator lucratur $\frac{2}{3}$ ſuæ pecuniæ: de ſumma expendit 8; reſidui lucratur $\frac{1}{4}$, expenditque de hac poſtrema ſumma 15: denique reſidui huius vltimi lucratur $\frac{2}{5}$, atque expendit 5: ac tandem reperit ſe 25 aureis amplius habere, quam ab initio habuerat. Quæro quot ab initio habuerit au. quot iam

ha-

habeat? Pono habuiſſe 1 ze, cui $\frac{1}{3}$ addita, facit $\frac{4}{3}$ ze. Ex his ſublatis 8 reſtant $\frac{4}{3}$ ze—8. Quibus ſi addatur $\frac{5}{4}$, fient $\frac{5}{3}$ ze—10; ex his dempta 15, relinquunt $\frac{5}{3}$ ze—25, huius , eſt $\frac{1}{3}$ ze—5, quæ addita his $\frac{5}{3}$ ze—25, facit $\frac{6}{3}$ ze—30, ſiue 2 ze—30. Vnde ſi tollantur 5, reſtant 2 ze—35. Hæc cum numero hoc 25 ſuperent pecuniam, quam ab initio habuit, erunt hæc 2 ze—35, his 1 ze + 25 æqualia; & ſi ab vtraq; parte tollatur 1 ze, hæc 1 ze, hæc 1 ze—35, his 25 Rurſus ſi vtrique parti addantur 35, erunt & hæc 60, huic 1 ze æqualia: ab initio ergo habuit 60 au, iam habet 85.

ARTICVLVS II.

EXEMPLA, QVAE SOLA *diuiſio ſoluit.*

Primum exemplum. Quidam mercator rogatus, quot haberet pecunias, reſpondit ſi pro mercibus darem $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{4}$ meæ pecuniæ; tu vero mihi donares 50, haberem 200: quæro quantum habeat? Pono habere 1 ze, ex qua ſi $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{4}$ tollantur, reſtant $\frac{3}{20}$ ze, quæ cum 50 faciunt $\frac{3}{20}$ ze + 50: ſunt ergo $\frac{3}{20}$ ze + 50, & 200 æqualia; & ſi ab vtraque parte tollantur 50, erunt & hæc $\frac{3}{20}$ ze, his 150 æqualia. Diuiſis igitur 150 per $\frac{3}{20}$ ze, proueniunt 1000; atque tot mercator habet au. Nam $\frac{3}{5}$ de 1000 ſunt 600; $\frac{1}{4}$ eſt 250; quæ ſubtracta de 1000, relinquunt 150; his ſi addantur 50; conſlantur 200.

Secundum. Diuidatur numerus 100 in duas partes, vt $\frac{3}{4}$ maioris ſint æquales minori cum 5. Ponatur maior

ior 1 ze; erit igitur minor 100 — 1 ze. Maioris $\frac{3}{4}$ faciũt $\frac{3}{4}$ ze; minor cum 5 facit 105 — 1 ze : ſunt ergo hæc $\frac{3}{4}$ ze, his 105 — 1 ze æqualia. Et ſi vtriq; parti addatur 1 ze, hæc 1 $\frac{3}{4}$ ze, his 105. Diuiſis ergo 105 per 1 $\frac{3}{4}$ ze, proueniunt 60, pars maior; erit igitur minor 40. Maioris $\frac{3}{4}$ ſunt 45; totidem quia minor cum 5 facit, bene operati ſumus.

Tertium. Da numerum, à cuius triplo, ſi tollam 30, reſiduum duplicem, à producto deducam 140, reſiduũ ducam in 4. à producto tollam 100, reſtet nihil. Quæro qui ſit numerus? Pono eſſe 1 ze; à cuius triplo ſi tollam 30, reſtant 3 ze — 30; ab huius duplo 6 ze — 60, ſi deducam 140, reſtant 6 ze — 200: hæc in 4 ducta, progignũt 24 ze — 800, à quibus ſi tollã 100, reſtant 24 ze — 900. quæ ſunt æqualia nihilo. Siue hęc 24 ze — 900 ſunt æqualia vni 0. Et ſi vtriq; parti addãtur 900, erunt & hæc 24 ze, his 900 ęqualia. Diuiſis igitur 900 per 24 ze, proueniunt 37 $\frac{1}{2}$, numerus quæſitus. Si enim ab eius triplo 112 $\frac{1}{2}$ tollam 30, reſtant 82 $\frac{1}{2}$; & ſi ab huius duplo 165, demam 140, reſtant 25; ac denique ſi à quadruplo huius 25, nimirum à 100, tollam 100 reſtat 0.

Quartum. Inueniatur numerus, cui ſi addatur $\frac{3}{4}$ ſui, & 7, tantum ſupra 90 excreſcat, quantũ ipſe eſt infra 79, Ponatur numerus ille 1 ze: cui ſi addatur $\frac{3}{4}$ ſui, & 7, fient 1 $\frac{3}{4}$ ze + 7. Hic numerus cum tantum ſit ſupra 90; quantũ 1 ze eſt infra 79, fit. vt ſi 1 ze ex 79, & 90 ex 1 $\frac{3}{4}$ ze + 7 ſubtrahantur, reſidua 79 — 1 ze & 1 $\frac{3}{4}$ ze + 7 — 90, ſint æqualia. Quare ſi vtriq; parti addantur 90, erunt & hæc 169 — 1 ze, his 1 $\frac{3}{4}$ ze + 7 æqualia. Si rurſus vtriq; parti addatur 1 ze, erunt & hæc 169, his 2 $\frac{3}{4}$ ze + 7 æqualia.

Deni-

Deniq; ſi ab vtraq; parte demantur 7, erunt & hæc 162, his $2\frac{1}{4}$ ze æqualia. Diuiſis ergo 162 per $2\frac{1}{4}$ ze proueniunt 72. Numerus quæſitus, cui ſi $\frac{1}{4}$ ſui cum 7. addantur, fient 97, qui numerus tantum eſt ſupra 90, quantum 72 ſunt infra 79.

Quintum. Ementium agrum 100 aureis ait alter alteri, ſi mihi tuæ pecuniæ $\frac{1}{2}$, & 5 aureos dares ; agrum emere poſſem. Infert alter, ſi tu $\frac{1}{3}$ tuæ mihi dares, emerem agrum. Quot quilibet aureos habet ? Pono primum habere 1 ze: alter ergo habet 100 -- $\frac{1}{3}$ ze (ſi quidem cum $\frac{1}{3}$ primi habet 100) cuius dimidium cum 5 additum pecuniæ primi, conficit 55 + $\frac{5}{6}$ ze, quæ ſunt æqualia his 100: & ſi ab vtraque parte toſlam 55, erunt & hæc 45, his $\frac{5}{6}$ ze. æqualia: Diuiſis ergo 4 per $\frac{5}{6}$ proueniunt 54, pecunia primi, cuius $\frac{1}{3}$, nempe 18 ex 100 ſublata relinquit 82, pecuniam ſecundi; huius enim dimidium 41, cum 5 additum pecuniæ primi facit 100. Pari modo $\frac{1}{3}$ pecuniæ primi addita pecuniæ ſecundi, facit 100.

Sextum. Diuidatur numerus 10 in duas partes, vt maiore per minorem diuiſa, proueniant 20. Pono maiorem 1 ze: erit igitur minor 10 -- 1 ze: diuiſo illo per hũc, proueniũt $\frac{1\,ze}{10 - 1\,ze}$, quæ ſunt æqualia his 20. Siue hæc $\frac{1\,ce}{10 - 1\,ze}$, ſũt his $\frac{20}{1}$ æqualia. Et reductis illis ad eãdẽ denominationẽ, hæc $\frac{1\,ze}{10 - 1\,ze}$ his $\frac{200 - 20\,ze}{10 - 1\,ze}$, ſublatoque communi denominatore, hæc 1 ze, his 200 -- 20 ze. Et ſi vtriq; parti addantur 20 ze. hęc 21 ze. his 200. Diuiſis igitur 200 per 21 ze, proueniunt $9\frac{11}{21}$ pars maior: erit igitur minor $\frac{10}{21}$, Diuiſis enim $9\frac{11}{21}$ per $\frac{10}{21}$, proueniunt 20, quod erat propoſitum.

ANNO-

ANNOTATIO.

Reducuntur hæ fractiones $\frac{1\,ze}{10-1\,ze}$ X $\frac{20}{1}$ *ad eandem denominationem per omnia, vt in reductione de abſolutis diximus. Ducuntur enim denominatores in ſe, & fit communis denominator* 10 — 1 ze. *Pro numeratoribus ducuntur per crucem,* 10 — 1 ze *in* 20. *& fiunt* 200 — 20 ze, *&* 1. *in* 1 ze *& fit* 1 ze *hoc modo* $\frac{200-20\,ze}{10-1\,ze}$, $\frac{1\,ze}{10-1\,ze}$.

Septimum exemplum. Viator quot diebus 7 milliaria conficit; alter 12 diebus poſt ab eodem loco diſcedit, peragitque quotidie milliaria 9: quæro quoto die hic poſterior priorem conſequatur? Hic primus 84 milliaria conficit, antequam poſterior iter inſtituit, ſepties. n. 12 ſunt 84. Quare inueniendus eſt numerus, qui ductus in 7, productoque additis 84, tantum fiat, quantum ſi idem numerus ducatur in 9. Ponatur numerus ille 1 ze, quæ ducta in 7, facit 7 ze, quæ cum 84 faciunt 7 ze + 84. Idem numerus ductus in 9 facit 9 ze; ſunt ergo hæc 7 ze + 84, his 9 ze æqualia; & ſublatis ab vtraque parte 7 ze, hæc 84, his 2 ze. Diuiſis igitur 84 per 2 ze, proueniunt 42. Atque tot diebus poſterior priorem conſequitur. Ductis enim 42 in 7, & producto additis 84, fiunt 378; totidem fiunt ex 42 in 9.

Octauum. Diuidatur numerus 38 in tres continuè proportionales, & quod fit à primo, vt tertio porportionem habeat ſeſquialteram ad id, quod fit à primo & ſecundo. Ponatur ſecundus 1 ze: erunt ergo primus & tertius ſimul 38 — 1 ze. Secundus in ſe ductis facit 1 q: totidem cum faciat primus in tertium, fit, vt productum primi, & ſecundi habeat ad productum ſecundi in ſe proportionem ſeſquialteram, per proprietat. 3. progreſſ. geomet. erit ergo quod fit à primo, & ſecundo

$\frac{2}{3}$ q, quod diuiſum per 1 ze, producit numerum primum $\frac{2}{3}$ ze; qui ſubtractus à ſumma primi & tertij, relinquit tertium 38 — $\frac{5}{3}$ ze, ſiue $\frac{114-5ze}{3}$. Ductus primus in tertium facit $\frac{228-10q}{9}$, quod eſt æquale 1q, quadrato nimirum ſecundi; ſiue, ſublato denominatore 9, eoque in 1q ducto, erunt hæc 19 q his 228 ze — 10q æqualia. Et ſi vtrinque addantur 10q hæc 228 ze his 19q; & abbreuiatis characteribus hæc 228, his 19 ze. Diuiſis ergo 228 per 19, proueniunt 12, numerus ſecundus; primus ergo, qui inuentus eſt $\frac{2}{3}$ ze, erit 8, tertius 18.

Nonum. Quidam expendit ſuæ pecuniæ $\frac{3}{5}$, plus 70 aureos; qua expenſione facta, reliqui illi erant 220 aurei: quæro quantum pecuniæ habuerit? Pono habuiſſe 1 ze. Vnde ſi expendat $\frac{3}{5}$, plus 70, reſtant $\frac{2}{5}$ ze —70, quæ ſunt æqualia his 220. Si igitur vtriq; parti addantur 70; erunt & hæc $\frac{2}{5}$ ze, his 290 æqualia. Diuiſis igitur 290, per $\frac{2}{5}$ ze, proueniunt 725; atq; tot aureos habuit: ex quibus ſi $\frac{3}{5}$, & 70 ſubtrahas reſtant 220.

Decimũ. Quatuor inter ſe diuidunt 1000 aureos, ſecũdus toties capit 3, quoties primus 2, terti⁹ toties 5, quoties ſecũdus 4, quartus toties 7. quoties tertius 6. Quæro quid quilibet capiat? Pono primum capere 1 ze: & quia quoties primus capit 2, toties ſecundus capit 3, dico 2 | 1 ze | 3, inuenio pro ſecundo $\frac{3}{2}$ ze. Rurſus quia quoties ſecundus capit 4, toties tertius capit 5, dico. 4 | $\frac{2}{3}$ ze | 5, & inuenio pro tertio $\frac{15}{8}$ ze. Denique quia quoties tertius capit 6, toties quartus capit 7, dico.
6 | $\frac{15}{8}$ ze | 7, & reperio pro quarto $\frac{105}{48}$ ze, ſiue $\frac{35}{16}$ ze. Sũma omniũ eſt $\frac{105}{16}$ ze, ęqualis 1000. Diuiſis igitur 1000 per $\frac{105}{16}$ ze prouenıũt 152 $\frac{8}{21}$, pecunia primi; quã ſi ducas productũ diuidas per 2, in 3 prodit pecunia ſecũdi 228 $\frac{12}{21}$:

hac

hac ducta in 5, producto diuiſo per 4, prouenit pecunia tertij 285 $\frac{15}{21}$. Deniq; hac ducta in 7, producto diuiſo per 6, prodit pecunia quarti 333 $\frac{7}{21}$. Summa omnium eſt 1000: bene ergo operati ſumus.

Vndecimum. Habeo duo pocula, & vnum operculum, quod ęſtimatur 90 aureis. Additum operculū precio minoris poculi facit ſummā duplam precij maioris poculi: additum verò precio maioris, facit ſummam triplam precij poculi minoris. Quæro quid vtrumque poculum valeat? Pono minus valere 1 ze, cui ſi addantur 90, erit ſumma 1 ze + 90 dupla precij poculi maioris: maius ergo valet $\frac{1}{2}$ ze + 45. Si iam 90 ad maioris precij poculum addantur, erit ſumma $\frac{1}{2}$ ze + 135 tripla precij minoris poculi: Ergo cum precium minoris poſitum ſit 1 ze, erunt hæc 3 ze, his $\frac{1}{2}$ ze + 135 æqualia; & ſi ab vtraque parte tollatur $\frac{1}{2}$ ze, hæc 2 $\frac{1}{2}$ ze, his 135. Diuiſis ergo 135 per 2 $\frac{1}{2}$ ze, proueniunt 54, precium minoris poculi: cui ſi addantur 90, & ſumma per 2 diuidatur, inuenientur 72 precium maioris poculi.

Duodecimum. Quidam habet duo pocula, & vnum operculum. Alterum poculum æſtimatur 60 aureis, ſi operculum addatur poculo 60 aureorum, erit ſumma dupla precij poculi ignoti: ſi addatur operculum poculo precij ignoti, erit ſumma tripla precij poculi noti. Quæro quanti ignotum poculum, & operculum æſtimentur? Cum ſumma ignoti poculi, & operculi ſit tripla precij noti poculi, valebunt ſimul 180 aureos: Si igitur numerus 180 ita diuidatur, vt vna pars cum 60 ſit dupla partis alterius, proueniet precium operculi. Sint ergo partes 1 ze, & 180 — 1 ze,

H 2 Addan-

Addantur 60 ad 1 ze, vt fiant 1 ze + 60, quæ cum iam dupla ſit partis 180 — 1 ze, ſi 180 — 1 ze duplicentur, erunt hæc 1 ze + 60, his 360 — 2 ze æqualia, &, facta reductione hæc 3 ze, his 300. Diuiſis ergo 300 per 3 ze proueniunt 100, precium operculi, alterum ergo poculum valebit 80. au.

Decimum tertium. Eſt progreſsio Arithmetica 12 terminorum, ſumma omnium eſt 282, differentia 3. Quæro quis ſit primus terminus? Pono 1 ze: ergo vltimus erit 33 + 1 ze per 1. regul. progreſſ: Arithmet. Summa primi, & vltimi 33 + 2 ze, quæ ducta in 6, ſemiſſem terminorum, facit 198 + 12 ze, æqualia his 282: igitur facta reductione, & diuiſione, erit terminus primus 7.

Decimum quartum. quinque vlnæ panni nigri, & 7 panni rubri valent 110 aureos; & eodem precio 11 vlnæ panni nigri, & 15 rubri valent 238, au. Quid vna vlna panni nigri, quid vna rubri valet? Pono vnam nigri valore 1 ze: quinque ergo valent 5 ze, ac proinde 7 rubri valebunt 110 — 5 ze. Eodem modo 11 vlnę nigri valebũt 11 ze, quindecim rubri 238 — 11 ze. Si iam dicas, 7 vlnæ panni rubri valent 110 — 5 ze, quid valent 15, reperies $235\frac{5}{7}$ — $10\frac{5}{7}$ ze; ſed & valent 238 — 11 ze. Sunt igitur $235\frac{5}{7}$ — $10\frac{5}{7}$ ze, & 238 — 11 ze æqualia; factaque reductione, $\frac{2}{7}$ ze, & $2\frac{2}{7}$: Diuiſis igitur $2\frac{2}{7}$ per $\frac{2}{7}$ ze, proueniunt 8; atque tot aureos valet vna vlna panni nigri, & quinque, 40; quibus ex 110 ſubtractis, reſtant 70: ergo cum 7 vlnæ panni rubri valeant 70 aureos, valebit vna, 10. Rurſus cum 11 vlnæ panni nigri valeant 88 aureos

Digitized by Google

aureos, valebunt 15 rubri (ſubtractis 88 ex 238) 150 ergo vna 10.

Articvlvs III.

EXEMPLA, QVAE EXTRACTIO radicis ſoluit.

Primum. Dentur duo numeri in dupla proportione, quorum quadrata in ſe ducta faciant 58564. Pono primum 1ze: erit ergo ſecundus 2 ze; horum quadrata 1q, 4q in ſe ducta faciunt 4qq. Quare hæc 4qq, his 58564 ſunt æqualia. Diuiſis ergo 58564, per 4qq, proueniunt 14641, quorum radix biquadrata, propter characterem qq, eſt 11, numerus primus: erit igitur ſecundus 22.

Secundum. Dentur duo numeri in tripla proportione, quorum cubi coniuncti faciant 9604. Ponatur primus 1ze: erit ergo alt 3 ze; horũ cubi coniũcti faciunt 28 c; ſunt ergo 28 c, & 9604 æqualia. Quare diuiſis 9604 per 28 c proueniunt 343, cuius radix cubica (propter characterem c) eſt 7, numerus primus: erit ergo ſecundus 21.

Tertium. Inueniantur duo numeri, quorum differentia ſit 10, faciantque numeri illi in ſe ducti 459. Ponatur primus 1ze: erit igitur alter 1ze + 10: hi numeri in ſe ducti faciunt 1q + 10 ze. Sunt ergo hęc 1q + 10ze, his 459 æqualia: & ſi ab vtraque parte tollantur 10 ze, erit & 1q, his 459 — 10ze, æquale. Cum ergo hi tres numeri ſeruent proportionem Artthmeticam, eorumq; exponentes ſint 2.0.1. poterit ex illis radix quadrata extrahi. Diuiſis igitur 459 — 10ze, per 1q, proueniunt

459—102𝓏𝓏: huius numeri radices ſunt 17, & 27. Nam ſemiſsis numeri radicum eſt 5, eius quadratum 25, ad quod additus abſolutus, propter ſignum +, facit 484; huius numeri radici quadratæ 22, ſi addatur, & ſubtrahatur ſemiſsis numeri radicum 5, prodeunt dicti numeri 17 & 27.

Quartum. Sit numerus 20 in duas partes diuidendus, hac lege, vt partes in ſe ductæ, gignant 91. Pono primam partẽ 1𝓏𝓏: erit igitur altera 20—1𝓏𝓏, quæ in ſe ductæ faciunt 20𝓏𝓏—1q, æqualia his 91. Facta reductione, erunt hæc 20𝓏𝓏—91, huic 1q æqualia. Quibus ex numeris, cum eorum exponentes 1. 0. 2. ſeruent proportionem Arithmeticam, poteſt extrahi radix quadrata. Diuiſis enim 20𝓏𝓏—91 per 1q, proueniunt 20𝓏𝓏—91. Ex quo iam extrahitur radix quadrata. Semiſsis numeri radicum eſt 10; ex cuius quadrato 100 ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9; cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſsi, exhibet partes 13 & 7, in quas numerus 20 diuidendus proponebatur.

Quintum. Quæratur numerus, qui maior ſit alio quodam numero 6, alio minor 8, faciantque illi duo numeri in ſe ducti 9752. Sit numerus ille 1𝓏𝓏: ergo 6 vnitatibus illo maior erit 1𝓏𝓏+6; minor vero 8 vnitatibus, erit 1𝓏𝓏—8. Hi numeri in ſe ducti, faciunt 1q—2𝓏𝓏—48, quæ ſunt æqualia his 9752; & facta reductione, erit 1q, his 9800+2𝓏𝓏 æquale. Dimidium numeri radicum eſt 1, ad cuius quadratum 1, abſolutus additus propter ſignum +, facit 9801: ad huius vero numeri radicem quadratam 99, additum dimidium numeri radicum, facit 100, qui eſt numerus quæſitus; maior

ior illo 6 vnitatibus eſt 106, minor 8, eſt 92; at hi duo numeri in ſe ducti faciunt 9752: ergo quæſtio ſoluta eſt.

Sextum. diuidatur numerus 12 in duas partes, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuiſum per partium differentiam, reddat $17\frac{1}{2}$. Partes ſunt prior 1 ze; altera 12 — 1 ze, quę in ſe ductæ faciũt 12 ze — 1q. Differentia partium eſt 2 ze — 12: nam ſi 12 — 1 ze, ex 1 ze ſubtrahantur, reſtant 2 ze — 12; per quam differẽtiam ſi 12 ze — 1q diuidantur, erit quotus $\frac{12\,ze - 1q}{2\,ze - 12}$, qui eſt æqualis numero $17\frac{1}{2}$. Hi duo numeri ducti ad eandem denominationem faciunt $\frac{24\,ze - 2q}{4\,ze - 24}$, $\frac{70\,ze - 420}{4\,ze - 24}$, quæ ſunt etiam æqualia. Abiecto ergo denominatore communi, erunt quoque numeratores 24 ze — 2q, & 70 ze — 420, æquales facta reductione, erunt hæc 2q, his 420 — 46 ze æqualia. Diuiſis iam 420 — 46 ze per 2q, proueniunt 210 — 23 ze. Semiſsis numeri radicum eſt $11\frac{1}{2}$, ad eius quadratum $132\frac{1}{4}$, abſolutus propter ſignum + additus, facit $342\frac{1}{4}$: ex huius radice quadrata $18\frac{1}{2}$, ſi ſemiſsis numeri radicum, propter ſignum —, ſubtrahatur, reſtant 7, pars maior: erit ergo minor 5. Nam hi numeri in ſe ducti faciunt 35, qui numerus per eorum differentiam 2 diuiſus, reddit quotum $17\frac{1}{2}$.

Septimum. Dentur duo numeri, quorum differentia ſit 8, hac lege, vt ſi differentia quadratorum ipſorum ſubtrahatur ex ipſorum rectangulo, relinquatur. 1. Pono primum eſſe 1 ze: erit ergo alter 1 ze + 8. Quadrata ipſorum ſunt 1q, & 1q + 16 ze + 64: differẽtia quadratorum eſt 16 ze + 64; qua ex rectangulo

ipſorum, quod eſt 1q + 8ꝛ, ſubtracta, relinquuntur 1q — 8ꝛ — 64, quæ ſunt æqualia. 1. Si igitur vtrique parti addantur 64, erunt hæc 1q — 8ꝛ, his 65 æqualia. Si rurſus vtrique parti addantur 8ꝛ, erit & hoc 1q, his 65 + 8ꝛ æquale, cuius radix 13, eſt numerus minor: erit ergo maior 21.

Octauum. Sunt tres numeri proportionales, quorum ſumma eſt 91. medius 21. quæro qui ſit primus, qui tertius? Pono primum eſſe 1ꝛ; & cum ſecundus ſit 21; erit tertius 70 — 1ꝛ. Quoniam verò quando tres numeri ſunt proportionales, eſt rectangulum extremorũ, æquale quadrato medij, fit vt hęc 441, his 70ꝛ — 1q ſint æqualia; & ſi vtrique parti addatur 1q, erunt & hæc 441 + 1q, his 70ꝛ æqualia: rurſus ſi ab vtraque parte demantur 441, erit & hoc 1q, his 70ꝛ — 441 æquale. Semiſsis numeri radicum eſt 35, eius quadratum 1225, vnde ſubtractus abſolutus, relinquit 784, huius numeri radix 28 addita ſemiſsi, facit 63, ſubtracta ex eodem relinquit 7. Sunt igitur hi tres numeri 7. 21. 63 ſimul facientes 91, quæſiti, ſunt enim, vt quæſtio volebat, proportionales.

Nonum. Dentur duo numeri, quorum quadrata habeant proportionem hanc $\frac{9}{4}$, faciantque quadrata cum numeris, 1628. Quia quadrata ponuntur habere proportionem hanc $\frac{9}{4}$, habebunt numeri hanc $\frac{3}{2}$ (numeri enim 3, 2, ſunt numerorum 9, & 4 radices.) Quare ſi primus numerus ponatur 1ꝛ: erit alter $\frac{3}{2}$ꝛ: ſumma quadratorum eſt $\frac{13}{4}$q, ſumma numerorum $\frac{5}{2}$ꝛ: ergo hęc $\frac{13}{4}$q + $\frac{5}{2}$ꝛ ſunt his 1628, æqualia; & ſi ab

ſi ab vtraq; parte tollatur $\frac{5}{2}$ze, hæc $\frac{13}{4}$q, his 1628 — $\frac{5}{2}$ze. diuiſis ergo 1628 — $\frac{5}{2}$ze per $\frac{13}{4}$q, proueniunt 500$\frac{12}{13}$ — $\frac{10}{13}$ze. Semiſsis numeri radicum eſt $\frac{5}{13}$, eius quadratum $\frac{25}{169}$, ad quod additus abſolutus, facit 501 $\frac{12}{169}$: ex huius radice quadrata 22 $\frac{5}{13}$: ſi tollatur ſemiſsis numeri radicum, reſtant 22, numerus primus: ergo cum alter ad hanc proportionem habeat ſeſquialteram, hoc eſt talem, qualis eſt inter 3 & 2, erit alter 33.

Decimum. Duo caupones habent vinum. Primus 80; alter 120 menſuras, vendit poſterior vnam menſuram vno aureo carius, quam prior. venditione peracta, habent ambo ſimul 44 aureos. Quæro quot menſuras quilibet vno aureo vendiderit? Pono priorem vno aureo vendidiſſe 1ze: ergo alter vno aureo vendidit 1ze + 1, adeoq; prior omnes $\frac{80}{1\text{ze}}$; poſterior omnes $\frac{120}{1\text{ze}+1}$ aureis vendidit. Hæc ſimul faciunt $\frac{200\text{ze}+80}{1\text{q}+1\text{ze}}$, quæ ſunt his 44 æqualia, ſiue his $\frac{44}{1}$. Quæ ſi ad eandem denominationem reducatur, erunt hæc $\frac{200\text{ze}+80}{1\text{q}+1\text{ze}}$, his $\frac{44\text{q}+44\text{ze}}{1\text{q}+1\text{ze}}$ æqualia, ſublatoque communi denominatore, hæc 200ze + 80, his 44 q + 44 ze. Facta ergo reductione, & diuiſione, proueniunt $\frac{39}{11}$ze + $\frac{20}{11}$, cuius numeri radix eſt 4: vendidit ergo prior 4 menſuras vno au, poſterior 5. Nam ſi diuidas 80 per 4, proueniunt 20. ſi 120 per 5; proueniunt 24, quæ ſimul faciunt 44, vt quæſtio voluit.

Sed extrahamus radicem quadratam ex hoc numero $\frac{3}{11}$ze + $\frac{20}{11}$. *Semiſsis numeri radicum eſt* $\frac{39\text{ze}}{484}$, *cui ſi addatur abſolutus* $\frac{20}{11}$, *ſiue* $\frac{880}{484}$, *fient* $\frac{2401}{484}$, *radices ſunt* $\frac{42}{22}$, *quæ ſi ſemiſsi numeri radicum addantur, fient* $\frac{88}{22}$, *ſiue* 4.

Vndecimum. Detur numerus, ex cuius biquadrato ſi tollantur 10 quadrata, reſidua ſint 340031 1.

Pona

Ponatur numerus 1ze: erit eius biqnadratum 1qq; ex quo ſi tollantur 1oq, erunt hæc 1qq—10q his 3400311. æqualia. Si vtrique parti addantur — 10q, erit & hoc 1qq, his 340031 1+10q æquale. Radix numeri 3400 11+10q eſt 1849, ex quo numero, cum numerus radicum habeat characterem hunc q, eruenda eſt radix quadrata, quæ eſt 43, qui numerus eſt 15, qui quæritur.

Duodecimum. Detur numerus, cuius biquadratum, & cubus ſimul, ad 21 eius quadrata habeant proportionem, quam 36 ad 1. Ponatur numerus ille 1ze: erit igitur eius quadratum 1q, cubus 1ce, biquadratum 1qq. Quadrata 21 ſunt ad 1qq+1ce, vt 1 ad 36. Ductis ergo 21q in 36, erunt hæc 1qq+1ce, his 756q æqualia. Et ſi ab vtraque parte tollatur 1ce, erit hoc 1qq, his 756q—1ce æquale. Hic locum numeri radicum tenet 1ce; abſoluti 756q. Exponentes horum characterum qq, ce, q, ſunt 4.3.2. ex quibus ſi ſubtrahantur 2, reſtant 2.1.0, vt proinde, abbreuiatis characteribus, 1q æquale ſit his 756—1ze. Semiſsis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$; ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$ additus abſolutus, propter ſignum +, facit 756 $\frac{1}{4}$. Ex huius radice 27 $\frac{1}{2}$, ſi tollatur ſemiſsis numeri radicum $\frac{1}{2}$, propter ſignum —, reſtant 27, numerus quæſitus. *Abbreuiari autem nunc tantum characteres poſſunt, quando eorum exponentes ſunt numeri. Quando duo ſunt numeri, tertius 0, abbreuiari non poſſunt, vt in præcedente exemplo, in quo exponentes erant 4, 2, 0.*

Decimum tertiũ. Eſt alicuius progreſsionis Arithmeticæ ab vnitate incipientis sũma 91, differẽtia 4. Quæritur vltimus terminus, Pono eſſe 1ze. Ex quo ſi per regul 4. progreſſ. Arith. tollo primũ reliquũ per differentiam 4 diuido, & quoto vnitatẽ addo, habeo numerũ termino-

norũ $\frac{1ze+3}{4}$, in cuius ſemiſsẽ $\frac{1ze+3}{8}$, ſi duco ſummã primi, & vltimi tetmini, nimirũ 1 ze + 1, produco $\frac{1q+4ze+3}{8}$, ſummam terminorum: ſed & 91, eſt eadem ſumma: ergo $\frac{1q+4ze+3}{8}$, & 91 ſunt æqualia, quæ ſi ad eandẽ denominationem reducantur, & communis denominator tollatur, erunt & hæc 1q + 4 ze + 3, his 728 æqualia, & facta reductione hoc 1q, his 725 — 4 ze, cuius numeri radix 25, eſt terminus vltimus.

Decimum quartum. Quidam conficit milliaria 1090. Primo die vnum, ſecundo $\frac{1}{5}$ amplius: tertio rurſus $\frac{1}{5}$ amplius, & eadem deinceps differentia. Quæro quanto tempore totum iter abſoluat? Pono 1 ze dierũ. Vnde ſi tollam 1, & reſiduum ducam in differentiam $\frac{1}{5}$ productoq́; addam primum terminum, efficio $\frac{1ze+4}{5}$ vltimum terminum; per regul. 1. progreſſ. Arith. cui ſi addo primum, hoc eſt, 1, efficic $\frac{1ze+9}{5}$, quo in ſemiſſem numeri terminorum, nempe in $\frac{1ze}{2}$ ducto produco $\frac{1q+9ze}{10}$, ſummam omnium terminorum; ſed & eadem ſumma eſt 1090; ſunt ergo $\frac{1q+9ze}{16}$ & 1090 æqualia: ergo & (facta reductione ad eoſdem terminos, & communi denominatore abiecto) hæc 1q + 9 ze, his 10900, & ſi ab vtraque parte tollantur 9 ze, hoc 1q, his 10900 + 9 ze, cuius numeri radix 100, eſt numerus dierum, quibus milliaria 1090 conficit.

ARTICVLVS IIII.

EXEMPLA SECVNDARVM radicum.

In hoc exemplorum genere pro ſecundis radicibus ponan.

ponuntur literæ A, B, C, &c. quæ per reductionem ad primas reducuntur, vt exempla docebunt.

Primum exemplum. Inueniantur tres numeri, quorum primus cum 136, ſit duplus ſecundi, & tertij. Secundus cum 184, triplus primi, & tertij. Tertius cum 176, quadruplus primi, & ſecũdi. Ponatur primus 1 ze, qui quia cum 136, eſt duplus ſecundi & tertij, erunt ſecundus & tertius ſimul $\frac{1}{2}$ ze + 68, quibus ſi addatur 1 ze, erunt omnes tres $1\frac{1}{2}$ ze + 68. Ponatur ſecundus 1 A, qui ſi ſubtrahatur ex $1\frac{1}{2}$ ze + 68, reſtant primus & tertius, $1\frac{1}{2}$ ze + 68 — 1 A. Quia vero ſecundus cũ 184, hoc eſt, 1 A + 184, triplus eſt primi & tertij, ſi $1\frac{1}{2}$ ze + 68 — 1 A, in 3 ducantur, erũt hęc 1 A + 184, his $4\frac{1}{2}$ ze + 204 — 3 A ęqualia, Et ſi vtriq; parti addantur 3 A, hæc 4 A + 184, his $4\frac{1}{2}$ ze + 204. Iterum ſi ab vtraq; parte tollantur 184, hæc 4 A, his $4\frac{1}{2}$ ze + 20. Ergo ſi 4 A æquantur his $4\frac{1}{2}$ ze + 20; æquabitur, 1 A, his $1\frac{1}{8}$ ze + 5. Secundus ergo, qui ponebatur 1 A, eſt $1\frac{1}{8}$ ze + 5. Ponatur tertius 1 B: ergo primus, & ſecundus erunt $1\frac{1}{2}$ ze + 68 — 1 B. Et quia tertius cum 176 eſt quadruplus primi, & ſecundi erunt hæc 1 B + 176, his 6 ze + 272 — 4 B æqualia: & ſi vtriq; parti addantur 4 B, hæc 5 B + 176, his 6 ze + 272. Rurſus ſi ab vtraq; parte tollantur 176, hæc 5 B, his 6 ze + 96. Quare ſi 5 B æquãtur his 6 ze + 96, ęquabitur 1 B, his $1\frac{1}{5}$ ze + $19\frac{1}{5}$. Tertius ergo; qui ponebatur 1 B, erit $1\frac{1}{5}$ ze + $19\frac{1}{5}$. Cum igitur primus poſitus ſit 1 ze, ſecundus, & tertius inuenti ſint $1\frac{1}{8}$ ze + 5, & $1\frac{1}{5}$ ze + $19\frac{1}{5}$, erunt oẽs tres $3\frac{13}{40}$ ze + $24\frac{1}{5}$. Sed quoque ſunt $1\frac{1}{2}$ ze + 68: ergo hæc $3\frac{13}{40}$ ze + $24\frac{1}{5}$, his $1\frac{1}{2}$ ze + 68 ſunt æqualia: & ſi ab vtraque parte tollantur $1\frac{1}{2}$ ze, hæc $1\frac{33}{40}$ ze + $24\frac{1}{5}$, his 68. Rurſus ſi ab vtraque parte tollantur $24\frac{1}{5}$, hæc $1\frac{33}{40}$ ze, his

his 43 $\frac{4}{5}$. Diuiſis ergo 43 $\frac{4}{5}$ per 1 $\frac{33}{40}$ ze, proueniunt 24. numerus primus. Ergo ſecũdus, qui inuẽtus eſt 1 $\frac{1}{8}$ ze + 5. erit 32: tertius verò, qui inuentus eſt 1 $\frac{1}{5}$ ze + 19 $\frac{1}{5}$. erit 48. Nam ſi 24 ducantur in 1 $\frac{1}{8}$ ze, prouenient 27, quæ cum 5 faciunt 32. Et ſi 24 ducantur in 1 $\frac{1}{5}$ ze prouenient 28 $\frac{4}{5}$, quæ cum 19 $\frac{1}{5}$, faciunt 48. Quod autem inuenti tres hi numeri 24, 32, 48 quæſtioni ſatisfaciant, facile probabis.

Secundum. Tres habent pecunias, ſi ſecundus, & tertius dent primo $\frac{1}{3}$ ſuæ pecuniæ, habebit primus 100. Si primus, & tertius dent ſeuundo $\frac{1}{4}$ ſuæ pecuniæ, habebit ſecundus 100. Si primus, & ſecundus dent tertio $\frac{1}{5}$ ſuæ pecuniæ, habebit tertius 100. Quæro quantum quilibet habeat? Pono primum habere 1ze; ſecundum, & tertium 1 A. Si ergo ſecundus, & tertius primo $\frac{1}{3}$ ſuæ pecuniæ dederint, habebit primus 1ze + $\frac{1}{3}$ A: quæ erunt æqualia his 100; & ſi ab vtraque parte tollatur 1ze hæc $\frac{1}{3}$ A, his 100 — 1ze: quare & 1 A, his 300 — 3ze Ergo ſecundus, & tertius, qui ponebantur habere 1 A, habent 300 — 3ze: ergo omnes tres habent 300 — 2ze. Ponatur ſecundus habere 1B: quo ſubtracto ex 300 — 2ze, reſtant 300 — 2ze — 1B, pecunia primi, & tertij; cuius $\frac{1}{4}$ addita ad pecuniã ſecundi, facit $\frac{3}{4}$ B + 75 — $\frac{1}{2}$ ze. quæ ſunt æqualia his 100; & ſi ab vtraq; parte tollantur 75, hæc $\frac{3}{4}$ B — $\frac{1}{2}$ ze, his 25. Si rurſus vtriq; parti addatur $\frac{1}{2}$ ze, hæc $\frac{3}{4}$ B, his 25 + $\frac{1}{2}$ ze: ergo & 1 B, his $\frac{2}{3}$ ze + 3 3 $\frac{1}{3}$: ſecundus ergo, qui ponebatur habere 1 B, habet $\frac{2}{3}$ ze + 33 $\frac{1}{3}$.

Ponatur tertius habere 10: ergo primus, & ſecundus habent 300 — 2ze — 10; cuius $\frac{1}{5}$ cum 10, facit $\frac{4}{5}$ + 60 — $\frac{2}{5}$ ze, æqualia his 100. Si ab vtraque parte tollantur

tur 60, erunt & hæc $\frac{4}{5}$ c — $\frac{2}{5}$ ze, his 40 æqualia. Si vtrique parti addantur $\frac{2}{5}$ ze, hæc $\frac{4}{5}$ c, his $\frac{2}{5}$ ze + 40: ergo & 1 c, his $\frac{1}{2}$ ze + 50. Tertius ergo, qui ponebatur habere 1 c, habet $\frac{1}{2}$ ze + 50. Cum ergo primus habeat 1 ze, ſecundus $\frac{2}{3}$ ze + 33 $\frac{1}{3}$, habebunt omnes tres 2 $\frac{1}{6}$ ze + 83 $\frac{1}{3}$, ſed & habent 300 — 2 ze. Hæc ergo 2 $\frac{1}{6}$ ze + 83 $\frac{5}{3}$, his 300 — 2 ze ſunt æqualia: & ſi vtriq; parti addantur 2 ze, hæc 4 $\frac{1}{6}$ ze + 83 $\frac{1}{3}$, his 300. Rurſus ſi ab vtraque parte tollantur 83 $\frac{1}{3}$, hæc 4 $\frac{1}{6}$ ze, his 216 $\frac{2}{3}$. Diuiſis ergo 216 $\frac{2}{3}$ per 4 $\frac{1}{6}$ ze, prouenìunt 52, pecunia primi: ſecundus ergo, & tertius, qui inuenti ſunt habere $\frac{2}{3}$ ze + 33 $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{2}$ ze + 50, habent 68, 76. Quæſtionem legitimè ſolutam eſſe facile probabis.

Tertium. Duo habent pecunias. Primus dicit ſecundo, ſi dederis mihi $\frac{1}{3}$ tuæ pecuniæ, habebo 110 aureos: ſecundus dicit primo, ſi dederis tu mihi $\frac{1}{4}$ tuæ, habebo 110. Quæro quot quilibet habeat? Pono primum habere 1 ze, ſecundum 1 A. Si ergo ſecundus dederit primo $\frac{1}{3}$ A, habebit primus 1 ze + $\frac{1}{3}$ A, hoc eſt 110: igitur facta reductione, erunt $\frac{1}{3}$ A, & 110 — 1 ze æqualia: ergo 1 A, & 330 — 3 ze. Quare ſecundus, qui ponebatur habere 1 A, habet 330 — 3 ze. Cui ſi primus dederit $\frac{1}{4}$ ze, habebit ſecundus 330 — 2 $\frac{3}{4}$ ze, hoc eſt, 110: facta ergo reductione erunt 220, & 2 $\frac{3}{4}$ ze æqualia. Quare diuiſis 220 per 2 $\frac{3}{4}$ ze prouenìunt 80, pecunia primi: ergo ſecundus, qui inuentus eſt habere 330 — 3 ze, habebit 90. Quæſtionem rectè ſolutam eſſe patet.

Quartum. Dentur tres numeri, hac lege, vt primus & tertius habeant proportionem duodecuplam ad ſecundum; ſecundus verò & tertius ad primum quindecuplam;

cuplam; quæro qui ſint numeri? Eſto primus 1ze, tertius 1 A; ſumma 1ze + 1 A eſt duodecupla ſecundi: ergo ſecundus eſt $\frac{1ze + 1A}{12}$, cui ſi addo tertium 1 A, efficio $\frac{1ze + 13A}{12}$, qui numerus cū ſit quindecuplus primi 1 ze: erunt 15 ze, & $\frac{1ze + 13A}{12}$ æqualia; & ſi ab vtraq; parte tollatur $\frac{1}{12}$ze, erunt $\frac{13}{12}$A, & 14 $\frac{11}{12}$ze æqualia: Igitur cum $\frac{13}{12}$A dent 14 $\frac{11}{12}$ze, dabit 1 A, 13 $\frac{10}{13}$ze: ergo tertius, qui ponebatur 1 A, erit 13 $\frac{10}{12}$ze, hic cum primo, 1 ze, facit 14 $\frac{10}{13}$ze, qui numerus cum ſit duodecuplus ſecundi, erit ſecundus $\frac{16}{13}$ze. Quare cum primi, & ſecundi ſit proportio, qualis eſt numerorum 13, & 16, tertius qui inuentus eſt 11 $\frac{10}{13}$ze, erit 179. Habemus ergo tres numeros 13. 16. 179, qui id quod propoſitum eſt præſtant, Idque in terminis minimis; nam in maioribus alij eſſe poſſunt. Vt hi tres 26. 32. 358; & hi 130, 160. 1790. &c.

ANNOTATIO.

Hic notetur mirabilis natura numerorum. Nam ſi priores duos ſtatuas vnitate maiores, quam ſunt denominatores proportionis, ſemper inuenies primum, & ſecundum. Vt ſi ſint inueniendi tres numeri, hac lege, vt primus cum tertio ſit quadruplus ſecundi; ſecundus cum tertio quintuplus primi; erit primus 5, ſecundus 6. Tertius inuenitur, ſi vel ſecundus quadruplicetur, & ex producto auferatur primus; vel primus quintuplicetur, & ex producto auferatur ſecundus? Vtrum enim feceris, reperies 19, numerum tertium.

Sunt quædam quæſtiones, quæ facilius per primas, quam per ſecundas radices ſoluuntur. Prima. Quinque

que habent pecunias, omnes ſecluſo primo 154; omnes ſecluſo ſecundo 146: omnes ſecluſo tertio 140. Omnes ſecluſo quarto 160. Omnes ſecluſo quinto 172. Quæro quantum quilibet habeat? Si ponamus primum habere 1ze, habebunt reliqui tanto plus, aut minus 1ze, quanto numeri à quibus excludũtur, ſuperant, aut excedunt, numerum, à quo primus excluditur. Habebit igitur ſecundus 1ze + 8, tertius 1ze + 14, quartus 1ze − 6; quintus 1ze − 18: ergo omnes 5ze − 2; ſed & habent 1ze + 104; cum enim primus habeat 1ze & quatuor reliqui 154, habebunt omnes 1ze + 154: ſunt igitur 5ze − 2, & 1ze + 154, æqualia; & facta reductione, 4ze, & 156. Diuiſis ergo 156 per 4ze, proueniunt 39 pecunia primi; habebit igitur ſecundus 47, tertius 53, quartus 33, quintus 21.

Secunda habetur apud Peletarium de radicibus ſecundis, quam & clarius habet pag. 345 ſuæ Algebræ. Quæ ſic habet. Quærantur duo numeri, quorum quadrata faciant 340: duo verò numeri in ſe ducti, faciant $\frac{5}{7}$ maioris quadrati. Pono primum eſſe 1ze; erit igitur ſecundus $\frac{5}{7}$ ze; quadrata vtriuſque faciunt $\frac{85}{49}$ q: ſunt ergo 340, & $\frac{85}{49}$ æqualia. Facta diuiſione, prodit quadratum maioris 196: igitur minoris erit 144, adeoque numeri ipſi 14 & 12.

Demonſtratio pendet ex 4 ſecundi Eucl: Cum enim quod fit ex duobus numeris ſit medium proportionale inter quadrata numerorum, erit vt quadratum maioris, ad id quod fit ex numeris, ita numerus maior ad minorem: ergo cum pono numerum maiorem 1ze, erit minor $\frac{5}{7}$ ze.

ARTI-

Articulus V.

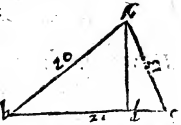
Exempla Geometrica.

Primum. Eſt rectangulum, cuius maius latus eſt duplum minoris, minus 3 pedibus: area verò eſt 209 pedum quadratorum; quæro quanta ſint latera? Pono minus eſſe 1 ze: erit igitur maius 2 ze — 3; hæc in ſe ducta faciunt 2 q — 3 ze, quæ ſunt æqualia his 209: & ſi vtrique parti addantur 3 ze, hæc 2 q his 209 + 3 ze.

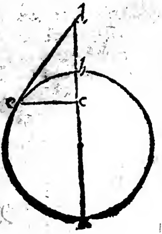
Diuiſis igitur 209 + 3 ze, per 2 q, proueniunt 104 $\frac{1}{2}$ + 1 $\frac{1}{2}$ ze. Semiſsis numeri radicum eſt $\frac{3}{4}$ eius quadratum $\frac{9}{16}$ additum ad abſolutum, facit 105 $\frac{1}{16}$: ad huius radicem 10 $\frac{1}{4}$, additus ſemiſsis, conflat 11, latus minus: igitur maius eſt 19, tribus vnitatibus minus quam 22, duplum minoris.

Secundum. Eſt columna rectangula, cuius latera baſeos habent proportionem duplam ſeſquiquintam altitudo verò tripla eſt lateris maioris; eſt columnæ craſsities eſt pedum cubicorum 14520: quæro, quanta ſint latera, & altitudo? Si ponatur minus latus 1 ze: erit maius $\frac{11}{5}$ ze, altitudo $\frac{33}{5}$ ze. Ducta latera in ſe faciunt $\frac{11}{5}$ q; hoc in altitudinem creat $\frac{363}{25}$ cf craſsitiem: igitur $\frac{363}{25}$ cf ſunt æqualia his 14520; quibus per $\frac{363}{25}$ diuiſis, proueniunt 1000, cuius numeri radix cubica 10, eſt latus minus: erit ergo maius 22, altitudo 66.

Tertium. Eſt triangulum a b c, cuius latus maximum b c eſt 21, a b 20, a c 13 pedum. Quero in quales partes perpendicularis a d lineam b c diuidat? Ponatur



natur b d 1 ze: erit igitur d c 21—1ze: Et quia per penult. primi Euclid. quadratũ lateris a b ęquatur quadrátis laterũ b d, a d, ſi ſubtraxero quadratũ lateris b d ex quadrato lateris a b, reſtabit quadratũ lateris a d. Eodẽ modo ſi ſubtraxero quadratũ lateris d c, ex quadrato lateris a c, reſtabit quadratum lateris a d. Igitur ſi ex 400, quadrato ipſius a b, ſubtraxero 1 q, quadratum ipſius b d, reſtabit 400 — 1q, quadratum ipſius ad. Item ſi 441—42ze+1q quadratum ipſius d c, ex 169, quadrato ipſius a c ſubtraxero, reſtabit 42ze—272—1q, quadratum ipſius a d. Ergo 400—1q, & 42ze—272—1q ſunt æqualia, & facta reductione, 672 atq; 42 ze. Diuiſis igitur 672 per 42ze, prouenient 16, pars maior b d, quæ ponebatur 1ze: quare minor d c eſt 5. Quod verum eſſe hinc conſtat, quia ſi tam quadratum ipſius b d, ex quadrato ipſius a b; quam quadratum ipſius d c, ex quadrato ipſius a c ſubtraxero, reſtabit quadratum ipſius a d 144; ergo ipſa a d erit 12. pedum.



Quartũ. Ad diametrũ a b ducta eſt perpẽdicularis c e, quæ qualium diametrus eſt 20, taliũ ipſa eſt 8 pedum. Quæro in quas partes diametrus in c ſecta ſit, quantę item ſint b d, & d e. Quia quadratũ perpẽdicularis c e eſt æquale rectãgulo ſub a c, c b cõtẽto per 13 ſexti; ſi diuidatur a b ita, vt rectangulum ſub partibus con-

contentum ſit æquale quadrato ipſius c e, inueniemus a c, 16; c b, 4 pedum. Ponatur b d 1 ze: erit ergo tota c d 4 + ze. Et quia per penult. primi & 36 tertij, tam quadrata ipſarum c d, c e; quam rectangulum a d, b d æquale eſt quadrato tangentis d e, fit vt hæc 80 + 8 ze + 1 q, his 20 ze + 1 q ſint æqualia: & reductione facta, hæc 80, his 12 ze. Diuiſis igitur 80 per 12 ze, proueniunt 6 $\frac{2}{3}$, exterior b d, quæ poſita fuit 1 ze: Ergo tota c d eſt 10 $\frac{2}{3}$, cuius quadratum 113 $\frac{7}{9}$. ſi quadrato ipſius c e iungatur, prodibit quadratum tangentis de, adeoque & ipſa tangens, 13 $\frac{1}{3}$ pedum.



Quintum. Trianguli a b c, rectanguli latus b c ſit 15; ſumma duorum, a c, a b, 75 pedum: quæro quanta ſint latera a b, a c? Pono a c eſſe 1 ze: erit igitur a b 75 — 1 ze. Quadrata laterum a b, b c æquantur quadrato lateris a c, per penult. primi. Eſt igitur hoc 1 q, his 5850 — 150 ze + 1 q æquale; & ſi vtriq; parti addantur 150 ze, hæc 1 q + 150 ze, his 5850 + 1 q. Rurſus ſi ab vtraque parte tollatur 1 q, hæc 150 ze, his 5850. Ergo, facta diuiſione, proueniunt 39 latus a c, erit igitur a b, 36.

Sextum. Dentur duo numeri, quorum quadrata faciant 1250, numeri verò in ſe ducti 527; quæro qui ſint numeri? Hæc quæſtio per 4. ſecundi ita ſolluitur. Rectangulum numerorum inueniendorum eſt 527: ergo duo rectangula ſunt 1054, quæ cum ſumma quadratorum faciũt 2304, qui numerus eſt quadratũ vtriuſq; numeri ſimul: eſt ergo vterq; ſimul 48. Qui ſi diuidatur in duas partes, ea lege, vt partes in ſe ductę faciant 527, erũt numeri reperti 31. 17.

Alia ſolutio. Per 4. ſecundi, eſt duorum numerorum rectangulum medium proportionale inter duorum illorum numerorum quadrata. Poſito ergo quadrato primi 1 q, erit ſecundi 1250 — 1q; proportionales ergo ſunt hi tres numeri 1q. 527. 1250 — 1q, & cum extremorum rectangulũ æquale ſit quadrato medij per 20. Sept. Euclid. erunt 1250q — 1qq, & 277729 æquales, factaque reductione, 1qq, & 1250q — 277729. Semiſsis numeri radicum eſt 625, ex cuius quadrato 390625, ſi abſolutus tollatur, propter ſignum —, reſtant 112896, cuius reſidui radix addita ſemiſsi numeri radicum conſtat 961; ſubtracta relinquit 289. quorum numerorum radices quadratæ 31, & 17, ſunt numeri quæſiti. Sunt autem ex 961, & 289 radices quadratæ iterum extrahendæ, quod numeri radicum character fuerit hic q.

Septimum. Quærantur duo numeri, ex quorum quadratis ſi ſubtrahantur numeri ipſi, reſtent 320: ſi vero ei, quod ex numeris fit, rectangulo ijdem addantur, fiant 191: quæro qui ſint numeri? Ponantur numeri 1 ꝝ, Si ergo 1 ꝝ addatur ad 320, prodeunt quadrata vtriuſq; 320 + 1 ꝝ: ſi vero 1 ꝝ ſubtrahatur ex 191, eſt at vtriuſque rectangulum 191 — 1 ꝝ: cuius duplum 382 — 2 ꝝ, additum ad ſummam quadratorum, conſtat quadratum vtriuſque numeri ſimul 702 — 1 ꝝ. Et cum vterque numerus ſimul poſitus ſit 1 ꝝ: erit q quadratum vtriuſque ſimul: ergo 1q æquale eſt inc 702 — 1 ꝝ, cuius numeri radix quadrata 26, eſt ſumma vtriuſque ſimul, qui ſi diuidatur in duas par-

partes, vt in ſe ductæ faciant 165 (nam ſi 26 ex 191 ſubtrahantur, reſtant 165) prodibunt partes 11, & 15.

Articvlvs VI.

Exempla contracte propoſita, & abſtracte ſoluta.

Aliquid contractè proponere, eſt illud practicè, & materialibus rebus coniunctum proponere. Abſtractè verò proponere aliquid, eſt illud à materialibus rebus ſeparatum proponere. Rem exempla declarabunt.

Primum. Quidam herus ſuo famulo quot diebus, ſi laboret, mercedem 12, ſi ocietur multam 8 crucifcrorum imponit. Anno finito, nec herus famulo aliquid dat, nec famulus ab hero aliquid recipit. Quæro quot diebus laborarit, quot feriatus fuerit? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 365 (tot enim dies annus habet) in duas Partes, vt altera ducta in 12, tantum faciat, quantum altera ducta in 8. Ponatur prior 1 ze; erit ergo poſterior 365 — 1 ze. Si illa in 12; hæc in 8 ducatur, erunt producta 12 ze, & 2910 — 8 ze, æqualia: igitur reductione, atque diuiſione facta, proueniunt 146 dies laboris, qui ex 365 ſubtracti, relinquunt 219 dies ocij.

Secundum. Hoſpes quidam vendidit 30 vrnas vini 210 aureis, quarum vrnarum aliæ habuerunt album, aliæ rubrum vinum: vendidit autem vnam vrnam vini albi 5; vnam rubri 8 aureis. Quæro quot vrnæ fue-

 rint

Digitized by Google

ſint albi, quot rubri vini? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 30 in duas partes, vt ſi vna pars in 5, altera ducatur in 8, producantur 210. Ponatur pars prior 1ze: erit ergo altera 30 — 1ze. Si illa in 5; hæc in 8 ducatur, producuntur 5ze, & 240 — 8ze, quæ addita conflant numerum hunc 240 — 3ze, æqualem huic 210. Facta iam reductione & diuiſione proueniunt 10, vrnæ vini albi: erunt ergo vini rubri vrnæ 20. Nam quinquies 10, faciunt 50: octies vero 20 faciunt 160, quæ ſimul faciunt 210.

Tertium. Sunt duo genera monetarum numero 1000, valentium au. 80: quorum alterius generis 10, alterius 20 valent vnum aureum. Quæro quot ſint quarum 10, quot quarum 20 vnum aureum valent? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 1000 in duas partes, vt ſi vna per 10, altera diuidatur per 20, faciant duo illi quoti 80. Poſita priore parte 1ze, erit altera 1000 — 1ze. Diuiſa illa per 10; hæc per 20, proueniũt $\frac{1ze}{10}$, & 50 — $\frac{1ze}{20}$, quæ ſimul faciunt 50 + $\frac{1ze}{20}$. Sunt ergo hæc 50 + $\frac{1ze}{20}$, his 80 æqualia. Facta reductione, & diuiſione, proueniunt 600, pars prior, erit ergo altera 400. Si enim 600 per 10; 400 per 20 diuidantur, proueniunt 60, & 20, quæ faciunt 80.

Quartum. Duæ ciuitates diſtant 228 milliaribus, ex quibus duo tabellarij exeunt, occurrentes ſibi 12 die, conficitque quotidie prior vno millari amplius, quam ſecundus; quæro quot milliaria quilibet quot diebus conficiat? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponi poteſt. Quærantur duo numeri, quorum exceſſus ſit 1, vt ſi vterq; ducatur in 12, fiat ſumma productorum hæc 228. Nu-

Numeri ſunt 1℞ & 1℞—1: qui ducti in 12 faciunt 12℞, & 12℞—12; horum ſumma 24℞—12, eſt æqualis his 228. Facta reductione, & diuiſione reperitur maior 10; ergo minor 9; quare prior quot diebus 10, alter 9 milliaria conficit.

Quintum. In qualibet duarum militarium turmarum, quarum altera alteram 300 militibus ſuperat, diſtribuuntur 4000 aurei, & capit quilibet minoris turmæ 3 aureis amplius, quam quilibet maioris: quæro quot in qualibet turma ſint milites? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponi poteſt. Diuidatur numerus 4000 per duos, quorum minor à maiore excedatur numero hoc 300, ſitque quotus prioris diuiſionis maior quoto poſterioris, numero hoc 3. Poſito diuiſore minore 1℞: erit maior 1℞ + 300, per quos ſi diuidatur numerus 4000, prouenient 4000/1℞. & 4000/1℞+300. Et quia quotus prior poſteriorem ſuperat hoc numero 3, addenda ſunt poſteriori 3, vt fiant 3℞+4900/1℞+300. Sunt ergo iam 4000/1℞, & 3℞+4900/1℞+300 æqualia; & ſi ad eandem denominationem reducantur, communiſque denominator abijciatur, 3 q + 3900℞, & 4000℞ + 1200000. Reductione igitur, & diuiſione factis, proueniunt 400000—300℞, cuius numeri radices ſunt 800, & 500, turmæ militum; nam ſi 4000 per illas diuidantur, proueniunt 5 & 8, quorum poſterior priorem excedit 3, excedit quoq; maior turma minorem 300 militibus, & capit quilibet maioris turmæ 5, quilibet minoris 8 au. vt quæſtio voluit.

Sextum. Quidam emptis 10 vlnis panni rogatur quanti vnam vlnam emerit? Reſpondet, quanto minoris emi 40 vlnas, quam 80 aureis, tanto mi-

noris emiſſem 50 vlnas, quam 95 aureis. Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Quæratur numerus, qui ſi ducatur in 40, & 50, atque ex productis reijciantur 80, & 95, reſidua ſint æqualia, quæro qui ſit numerus? Ponatur numerus ille 1ze, qui ductus in 40, & 50, facit 40ze, & 50ze; ex quibus ſi demantur 80, & 95, reſtans 40ze—80, & 50ze—95, quæ ſunt æqualia. Reductione, & diuiſione factis, proueniunt $1\frac{1}{2}$, atque tanti emit vnam vlnam. Si enim vna conſtat $1\frac{1}{2}$ aureis conſtabunt 40, aureis 60, & 50, au. 75. Cum itaque & 60 minus ſint quam 80; & 75 minus quam 95, aureis 20, bene operati ſumus.

Septimum. Sunt duæ ſocietates, quarum altera alteram excedit 16 ſocijs, in quarum quamlibet ſumma pecuniæ diſtribuitur 688 aureis maior, quam ſit vtriuſque ſocietatis numerus, capitque quilibet minoris ſocietatis 8 aureis amplius, quam quilibet maioris. Quæro & quanta ſit pecuniarum ſumma, & quot in qualibet ſocietate ſocij? Ponatur ſocietatis minor 1ze, erit igitur maior 1ze+16: vtraque addita aureis 688, facit ſummam pecuniæ diſtribuendæ, hanc 2ze+704, iã abſtractè ſic propono quæſtionē. Diuidatur numerus 2ze+704 per 1ze, & 1ze+16, vt quotus ex 1ze proueniẽs, maior ſit quoto, ex 1ze+16 proueniente, numero hoc 8. Quoti sũt $\frac{2ze+704}{1ze}$, & $\frac{2ze+704}{1ze+16}$, & cum prior ſuperet poſteriorem octonario, ſi poſteriori addantur 8, erunt hæc $\frac{2ze+704}{1ze}$ his $\frac{10ze+832}{1ze+16}$ æqualia; & reductis ad eandem denominationem, ſublatoq; communi denominatore, hæc 1q+832ze his 2q+736ze+11264, cuius radix 32, eſt ſocietas minor: erit igitur maior 48. Hæ ſocietates cum 688 aureis faciunt

unt 768, ſummam pecuniarum, quæ per 32 diuiſa reddit 24; per 48 duntaxat 16; habet ergo quilibet minoris ſocietatis 8 aureis amplius, quam quilibet maioris.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.
LIBER TERTIVS.
DE NVMERIS IRRATIONALIBVS abſolutis.

NVmeri irrationales abſoluti, ſunt radices eorum rationalium abſolutorum, qui radices rationales non habent. Exempli cauſa. Radix quadrata numeri 16, non eſt irrationalis, ſed rationalis, eſt enim 4. Nec radix cubica numeri 27, eſt irrationalis, ſed rationalis, eſt enim 3. Nec denique radix ſuperſolidi primi numeri 32, eſt irrationalis, ſed rationalis, eſt enim 2 At radix quadrata numeri 6, irrationalis eſt ſiquidem numerus 6 non eſt quadratus. Et radix cubica numeri 20, irrationalis eſt, cum 20 non ſit numerus cubicus Denique radix ſuperſolidi primi numeri 40, eſt irrationalis, quod 40 non ſit numerus ſuperſolidus. Signantur numeri irrationales, ſiue radices ſurdæ hoc modo, √q 6, √𝒸 20, √ß 40. Primus ſignificat radicem quadratam, ex 6, Secundus radicem cubicam ex 20. Tertius radicem ſuperſolidam primam ex 40. Iiſdem igitur characteri-

bus notantur irrationales, quibus coſſici rationales; niſi quod irrationalibus characteres cum hoc ſigno √ *præfigantur, coſſicis poſtponantur.*

Numeri irrationales abſoluti, *ſiue radices ſurdæ, diuidi poſſunt in ſimplices & cõpoſitas. Simplices à pleriſq; mediales, quod per illas, inter duos numeros; quotcũq; medÿ proportionales inueniri poſſint. Cõpoſitæ dicuntur, quod ſignis hiſce* +, — *copulẽtur, & diſiungantur. Diuiduntur compoſitæ in ligatas, vniuerſales, & diſtinctas. Ligatæ ſunt in quibus particulæ coniunctim accipiuntur. Exemplum in numeris rationalibus hoc eſto* √q 36 + √q 16, *quæ faciunt* 10. *Nam radix ex* 36, *eſt* 6; *radix verò ex* 16, *eſt* 4: *ſed* 6 & 4, *faciunt* 10, *quorum quadratum eſt* 100.

Radix vniuerſalis *eſt, quando primus character vtramq; particulã afficit, qui à particulis puncto, aut parẽtheſi ſeiungitur hoc modo.* √q. 22 + √q 9; *aut hoc,* √q(22 + √q9). *Nã radix ſecũdæ particulæ,* √q9, *eſt* 3, *quæ addita ad* 22 *particulã primam, facit* 25, *cuius radix eſt* 5: *totus ergo hic numerus* √q(22 + √q9) *valet.* 5.

Diſtinctæ, *quas quidam adferunt, ſunt eadem cũ ligatis niſi quod in illis particulæ ſeparatim accipiũtur, vt in exemplo de ligatis allato,* √q36 + √q16, *particulæ non accipiuntur coniunctim ſed ſeparatim, faciunt enim* 6, & 4; *non, vt in ligatis,* 10.

Nos, hac diuiſione miſſa, illos numeros irrationales in quibus primus character non vtramq; particulam

culam afficit, vocabimus compoſitos & diminutos: In quibus vtramque afficit, vniuerſales.

Dicuntur à quibuſdam omnes numeri irrationales conſtantes duabus particulis, & ſigno +, binomia Cõſtantes duabus, & ſigno —, reſidua ſiue apotomæ Cõſtantes verò tribus particulis & ſignis quibuſcumq;, trinomia; conſtantes quatuor, quadrimonia.

Diſputari etiam hoc loco ſolet ſint ne radices irrationales, numeri, an non. Sed numeros eſſe, duo argumenta ſuadent. Primum eſt, quod ex duobus irrationalibus produci poſſit rationalis, vt ex √q 5 in √q 20. fit 10. Alterum eſt, quod, vt inter duos numeros cõtinuos, vt inter 2 & 3, infiniti cadunt fracti; ita inter eoſdem infiniti cadere poſſint irrationales, cuiuſmodi ſunt √q 5. √q 6. √q 7 √q 8. √q 9. √q 10. √q 11. √q 12. &c.

CAPVT I.

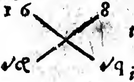
In hoc cap. primo tradam elementa ſimplicium; ſecundo compoſitorum, & diminutorum, tertio vniuerſalium.

Articvlvs I.

De Additione et Svbtractione irrationalium ſimplicium.

Simplices irrationales, aut ſunt cõmenſurabiles, aut incommenſurabiles. Item, aut habent eoſdem, aut diuerſos characteres. Si habent diuerſos ad eoſdem ante opera-

operationem reducendi ſunt, hoc qui ſequitur, modo.



Simplices irrationales diuerſos habentes characteres, ad eoſdem reducere.

Collocentur numeri ſupra, characteres infra vt hic apparet: deinde per crucem fiat multiplicatio talis: qualem character indicat. Poſtremo vtrique producto vterque character præfigatur. Exemplum. Sint ad eoſdem characteres reducendi hi duo numeri √cꝭ 16, & √q 8. Collocatione facta, multiplicentur 16 quadratè propter characterem √q per crucem ei reſpondentem: 8 cubicè propter eandem cauſam, & producentur 256, & 512 quibus præfigatur vterque character hoc modo √q cꝭ 512 + √q cꝭ 256.

His expoſitis ad elementa reuertimur. Ac primo quidē, ſi habeant diuerſos characteres reuocentur ad eoſdē, ac tunc ſi fuerint incōmenſurabiles addātur per +, ſubtrahantur per —. Quanquam non ſit neceſſe ad eoſdem illos characteres reducere, poſſunt. n. non reducti addi. Vt ſi √q8 ad √cꝭ 12, addenda ſint, fient √q8 + √cꝭ 12. Si √q8 ex √cꝭ 12 ſubtrahenda, reſtabunt √cꝭ 12 — √q 8.

Si habeant eoſdem characteres, & incōmenſurabiles ſint, adduntur quoq; per +, ſubtrahūtur per —. Vt ſi √q 11, ad √q 13, addēda ſint, fient √q 11 + √q 13. Si √q 11 ex √q 13 ſubtrahenda reſtabunt √q 13 — √q 11. Poſſunt tñ radices incōmenſurabiles quadratę per 4. ſecundi Eucli. addi. Si nimirū ad ſumam quadratorum, addatur duplū eius, quod ex ipſis gignitur. Vt ſi √q 11, & √q 13 addenda ſint. Summa quadratorū eſt 24. (Nam quadratum irrationaliū, aut cubus, &c, habetur ſi ab ipſis character quadraticus, aut cubicus &c. tollatur, ita ſit, vt horum duorū √q 11, √q 13, quadrata ſint 11 & 13, ſumma vtriuſq; 24) Id quod ex ipſis fit, √q 143, eius duplū √q 572: ergo ſū-

ma

ma $\surd q(24+\surd q572.)$ Subtractio fit, ſi ex ſumma quadratorum, ſubtrahatur duplum eius, quod ex ipſis naſcitur, hoc modo. $\surd q(24-\surd q572.)$

Si ſint cōmenſurabiles, hoc eſt, ſi diuiſi per aliquam communem menſuram, quotos reddant quadratos, cubicos, biquadratos &c. ſic addūtur. Quotorum radices adduntur, ſumma ad quadratum cubum, biquadratum, &c. ducitur: quadratū, cubus, biquadratum, &c. ducitur in communem menſuram, & habetur ſumma. In ſubtractione radix quoti minoris ſubtrahitur ex radice maioris, reſiduum ducitur ad quadratum, cubum &c.

Exemplum. Sint addenda $\surd q27$, & $\surd q12$. Diuiſa per 3, communem menſuram, reddunt quotos quadratos 9 & 4, quorum radices 3, & 2 iunctæ faciunt 5, huius quadratum 25 ductum in 3 producit $\surd q75$, ſummam, Si $\surd q12$, ex $\surd q27$ ſubtrahēda ſint, ſubtrahitur radix minor 2, ex maiore 3, & reſtat, 1 cuius quadratum 1, ductum in 3, facit $\surd q3$, reſiduum.

Secundum exemplum. Sint hi tres numeri $\surd q20$, $\surd q45$, $\surd q80$ addendi: diuiſi per 5 reddunt quotos quadratos 4, 9, 16: quorum radices 2, 3, 4 iunctæ faciunt 9 huius quadratum 81, ductum in 5, producit $\surd q405$, ſummam omnium.

Tertium exemplum. Sint hi $\surd c℞108$, $\surd c℞32$ addendi. Diuiſi per 4 reddunt quotos cubicos 27, 8: ſumma radicum eſt 5, cuius cubus 125 ductus in 4 producit $\surd c℞500$ ſummam. Sint iam $\surd c℞108$, ex $\surd c℞500$ ſubtrahenda. Diuiſa per 4, reddunt 27, 125, quotos cubicos, quorum radices ſunt 3, & 5; ſubtracta illa ex hac, relinquit 2 cuius cubus 8 ductus in 4, producit $\surd q32$, reſiduum

Quando

Quando duo ſimiles adduntur, multiplicatur vnus eorum per 4: quando tres, per 9; quando quatuor, per 16 &c. Vt ſi ſint √q12, & √q12 addendi, ducitur √q12 in 4. vt fiant √q48. vtriuſq; ſummam. Si tres √q12, √q12. √q12 ſint addendi, ducitur √q12 in 9, & fit ſumma hæc √q108, &c.

Articvlvs II.

De mvltiplicatione, et diuiſione ſimplicium.

Primo, quando multiplicantes eoſdem habent characteres, ducuntur numeri in ſe, retento communi charactere. Vt ſi √q20 ducenda ſint in √q18, producuntur √q360. Si √c12 in √c18 producuntur √c216, hoc eſt, 6, quia 216 eſt numerus cubicus, & eius radix 6.

Secundo. Si rationalis in irrationalem ſit ducendus, reducendus eſt prius rationalis ad ſpeciem irrationalis, vt ad quadratum, cubum, biquadratum &c. prout irrationalis habuerit characterem √q aut √c, aut √qq, &c. Vt ſi ducenda ſint √q32 in 8, ducenda prius ſunt 8 ad quadratum, ac deinde √q32 in √q64 ducenda, vt producantur √q2048. Si 6 in √c12, ducenda ſunt 6 ad cubum √c216. Deinde √c12 in √c216 ducenda, vt producantur √c2592.

Eodem modo ſi 8 diuidenda ſint per √q4, ducenda ſunt 8 ad quadratum, ac deinde √q64 per √q4 diuidēda, vt proueniant √q16, hoc eſt, 4. Item ſi diuidenda ſint 12 per √q8, diuidantur √q144, per √q8, proueniant √q18.

Tertio. Si multiplicantes: vel diuidendus, & diuiſor habeant diuerſos characteres, ad eoſdem ante operationem reuocandi ſunt. Sint √c16 per √q8 multiplicandi

candi. Reducti ad eoſdem characteres, faciunt √qℭ 512 + √qℭ 256. Hos in ſe ducto, & produces √qℭ 131072. Sit quoque √ℭ 8000 per √q 16 (hoc eſt per 4) diuidendus. Reducti ad eoſdem characteres, faciunt √qℭ 64000000, & √qℭ 4096. Diuiſo illo per hunc, prodeunt √qℭ 15625, cuius radix quadrata eſt 125; huius cubica 5. Diuiſis ergo √ℭ 8000 per √q 16, proueniunt 5.

Quarto. Quando numerus quadratè, cubicè, biquadratè, &c. multiplicatur, tollitur character, & res eſt perfecta. Vt ſi √q 8 ſit quadrandus, fiunt 8: ſi √ℭ 12 cubicè multiplicandus, fiunt 12: ſi √qq 18 biquadratè, fiunt 18, &c. Simili modo radix quadrata numeri 8 eſt √q 8. Radix cubica numeri 12, eſt √ℭ 12. Radix biquadrata numeri 18, eſt √qq 18.

ANNOTATIO.

INTER DVOS NVMEROS DATOS quotcunque medios proportionales inuenire.

Primò, *diuidatur maior datus per minorem.*

Secundò, *progreſsio geometrica ab vnitate incipiens inſtituatur, terminos habens duobus amplius, quàm quot ſunt medij inueniendi, cuius progreſsionis denominator ſit quotus antea inuentus.*

Tertiò, *ex terminis inuentis extrahantur radices. Quadrata quidem, ſi vnus duntaxat medius ſit inueniendus; cubica ſi duo; biquadrata ſi tres; ſuperſolida prima ſi 4, &c.*

Quartò, *radices inuentæ ducantur in minorem numerum datum.*

Exem-

Exemplum. *Sint inter 3, & 768 tres medij proportionales inueniendi, Diuiſis 768 per 3, proueniunt 256. Primus ergo progreſsionis terminus eſt, 1. Secundus 256 tertius 65536, quartus 16777216, quintus 4294967296. horum terminorum radices quadrata ſunt 1.4.16.64.256. quæ ducta in minorem numerum datum 3, producunt 3.12.48.192.768. Sunt ergo hi tres termini 12.48,192, inter extremos datos 3. & 768 medij proportionales.*

Aliud exemplum. *Sint inter 4 & 12 quatuor medij inueniendi, Diuiſis 12 per 4, proueniunt 3. Progreſsio ſex terminorum hæc eſt 1.3.9.27.81.243. Horum terminorum radices ſuperſolidi primi ſunt 1.√ſs 3.√ſs.9.√ſs 27.√ſs 81.√3. Quæ ducta in datum numerum minorem 4, producunt 4.√ſs 3072.√9 9216.√ſs 27648.√ſs 82944, 12. Debent autem √ſs 3.√ſs 9, &c. non in 4: ſed in eius ſuperſolidum primum, nimirum in 1024 duci, vt ex dictis manifeſtum eſt. Quando inter duos datos vnus tantum medius proportionalis inueniendus eſt, ducuntur dati in ſe, & ex producto radix quadrata extrahitur.*

ARTICVLVS III.

DE ADDITIONE, ET SVPTRACTIone compoſitorum, & diminutorum.

Si, quæ de additione, & ſubtractione coſsicorum rationalium circa ſigna +, & —. Item de Additione & ſubtractione ſimplicium irrationalium, dicta ſunt, probè intelligantur, nulla hic difficultas erit. Nam & hic regulæ illæ locum habent. Pri-

Prima. *Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando numeri præpoſterè ponuntur, tunc enim ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + ſit —; & ex — ſit +.*

Secunda. *Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis, & in additione ponitur ſignum maioris numeri; in ſubtractione verò ſuperioris, ſiue maior is ſit, ſiue minor, ſiue æqualis.*

Exemplum Additionis. In hoc exemplo duo priores numeri adduntur, vt de ſimplicibus dictum eſt. Duo ſecundi, vt rationales coſsici. Duo tertij mutant ſpeciem operationis, hoc eſt pro Additione fit ſubtractio. Duo quarti cum ſint diuerſorum nominum, addi non poſſunt niſi per ſignum +; ſed adduntur ſimul quartus ſuperioris, & vltimus inferioris ordinis, quod vterque ſit rationalis. Item quartus inferioris, & vltimus ſuperioris ordinis, quod eoſdem characteres gerant. Iam vero, quia √q162 & √q72 ſunt eiuſdem generis, geritque √q162 ſignum +; √q72 verò ſignum —, fit, vt ſi hic ex illo ſubtrahatur, reſtent √q18. Item, quia 10 gerit ſignum —; 16 verò +, fit, vt ſi 10 ex 16 tollantur, ſuperſint 6. Summa ergo omnium eſt √q18 + 6 + √c3.

√q50 + 20 — √c24 + 12 — √q8
√q32 — 30 + √c81 — √q32 + 4
___
√q162 — 10 + √c3 + 16 — √q12
___
√q18 + 6 + √c3.

Exemplum ſubtractionis. Duo ſecundi mutant ſpeciem operationis, hoc eſt, √q18 & √q50 adduntur, retēto ſigno ſuperioris. Tertius ſuperioris ſubtrahitur à

√q50 + √q18 + 8 — √q27 + √q48
√q18 — √q50 — √q12 + 10 + √q108
___
√q8 + √q128 — 2 — √q3 — √q12
___
√q200 — √q27 — 2.

quarto inferioris ordinis, & mutatur + in —, iuxta primam Regulam. Tertius inferioris ſubtrahitur à quarto ſuperioris ordinis, & reſtant √q3. Subtrahitur denique vltimus ſuperioris ab vltimo inferioris, & mutatur + in —, iuxta primam regulam. Quia verò √q8, & √q128, faciunt √q200; Et — √q3, atque — √q12, faciunt √q27, fit, vt reſtent √q200 — √q27 — 2.

ARTICVLVS IV.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuiſione compoſitorum, & diminutorum.

Multiplicatio irrationalium compoſitorum, & diminutorum, fit per omnia, ſicut ſimplicium, dummodo circa ſigna regula de multiplicatione coſſicorum rationalium tradita, ſeruetur, quæ ſic habet.

Eadem ſigna ponunt +, *Diuerſa* —. Addo vnicum exemplum. Sint 18 + √q54, in 6 — √q24 ducenda. Duco 6 in 18, & produco 108. Secundo, duco 6 in √q54, & produco √q1944. Tertio duco — √q24 in 18. & produco — √q7776. Quarto duco — √q24, in √q54, & produco — √q1296, hoc eſt — 36. quæ ex 108 ſubtracta, relinquunt 72. Subtracta verò √q1944 ex — √q7776, relinquunt — √q1944.

18 + √q54
6 — √q24

108 + √q1944 — √q7776 — √q1296

72 — √q1944.

Note-

Notetur, quando numeri multiplicantes, diuerſos habent characteres, eos ante operationem ad eoſdem eſſe reuocandos, vt de multiplicatione ſimplicium diximus. Multiplicatio hæc deſumpta eſt ex 4. ſec. Euclid.

De diuiſione multa dici poſſent; ſed paucis me expedio. Aut enim diuiſor eſt ſimplex, aut compoſitus. Si ſimplex, per illum ſingulæ diuidendi particulæ ſunt diuidendæ, ſiquidem eoſdem cum diuiſore habeant characteres. Si diuerſos, ad eoſdem ante operationem ſunt reuocandæ. Exemplum. Sint √q48 + √q20 per √4q diuidēda. Diuiſis √q48 per √q4 proueniūt √q12. Diuiſis verò √q20 per √q4, proueniunt √q5. Si vero √q200 — √c80, per 2 ſint diuidenda, prouenient √q50 — √c10. Diuiſis enim √q200 per 2, hoc eſt per √q4, proueniunt √q50; diuiſis verò √c80 per 2, hoc eſt, per √c8, proueniunt √c10.

Sint iterum diuidenda 12 + √c128, per √q8. Diuide 12, hoc eſt √q144 per √q8, & prouenient √q18. Diuide quoque √c128, per √q8. Sed quia diuerſos habent characteres, ad eoſdem reducantur, ac deinde √qc16384, per √qc512 diuidantur, & prouenient √qc32.

Si diuiſor ſit compoſitus, ſintque particulæ radices quadratæ, aut biquadratæ, reducendus eſt diuiſor ad ſimplicem, hoc modo.

Signum poſterioris particulæ + mutetur in —; & — in +; atque in diuiſorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuidendus, quam diuiſor, vt producantur noui, diuidendus, & diuiſor.

Exemplum, Sint 60 per √q18 + √q8 diuidenda. Duc tam 60, quam √q18 + √q8, in √q18 — √q8, & pro-

 duce,

ducetur hic nouus diuidendus $\sqrt{q}\,64800 - \sqrt{q}\,28800$; ſiue $\sqrt{q}\,7200$: & hic nouus diuiſor 10. Diuiſis ergo $\sqrt{q}\,7200$ per 10, ſiue per $\sqrt{q}\,100$, proueniunt $\sqrt{q}\,72$.

Si diuiſor habeat tres particulas quadratas, aut biquadratas, mutetur particulæ vltimæ ſignum $+$ in $-$; & $-$ in $+$, inque diuiſorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuidendus, quam diuiſor. Quo facto, ſi diuiſor fuerit ſimplex, benè quidem. Si compoſitus alia reductione opus erit.

Exemplum. Sint 120 diuidenda per $\sqrt{q}\,50 + \sqrt{q}\,32 + \sqrt{q}\,18$, ducantur, tam 120, quam $\sqrt{q}\,50 + \sqrt{q}\,32 + \sqrt{q}\,18$, in $\sqrt{q}\,50 + \sqrt{q}\,32 - \sqrt{q}\,18$, & producentur $\sqrt{q}\,720000 + \sqrt{q}\,460800 - \sqrt{q}\,259200$, hoc eſt, $\sqrt{q}\,1036800$, nouus diuidendus; & 144, nouus diuiſor. Diuiſis ergo $\sqrt{q}\,1036800$ per 144, hoc eſt, per $\sqrt{q}\,20736$, proueniunt $\sqrt{q}\,50$.

Pro radicibus cubicis, ſuperſolidis, & alijs, vide Algebram Clauij cap. 23.

Articvlvs V.

De Vniversalium calculo.

Hic priori loco de multiplicatione, & diuiſione agendum eſt. Multiplicaturus ergo numerum quemcunque vniuerſalem irrationalem in alium, duc ante operationem vtrumq; multiplicantem ad quadratum, aut cubum, &c.

Exemplum. Volo multiplicare $\sqrt{q}(21 + \sqrt{q}\,16)$ hoc eſt 5, per 7. Quadratũ multiplicandi eſt $21 + \sqrt{q}\,16$ (tollitur enim

enim duntaxat qui eſt ante parentheſin character) multiplicantis 49. Ductis ergo $21 + \surd q16$, in 49, proueniunt $1029 + \surd q38416$, hoc eſt, 35: nam radix quadrata poſterioris particulæ 196 addita priori, efficit 1225, cuius radix eſt 35.

Quando radix quadrata in ſuum reſiduum ducitur: ita agito. Connecte illa ſigno +, idq; duplici poſito. Deinde vtriuſque quadratum ſimul iunge, cum eorum rectangulo bis ſumpto per 4. ſec. Eucl. Exemplum. Sint $\surd q(10 + \surd q24)$ in $\surd(10 - \surd q24)$ ducenda. Connecte illa ſigno +, & bis pone, vt in formula vides:

$$\begin{array}{cc} \surd q(10 + \surd q24) + \surd q(10 - \surd q24) \\ \underline{\surd q(10 + \surd q24) \quad \surd q(10 - \surd q24)} \\ \underline{10 + \surd q24 + \quad 10 - \surd q24} \\ 20 + \surd q304 \end{array}$$

Deinde quadra vtramq; particulam, hoc eſt, tolle characterem ante parentheſin poſitum, & reperies 20: nam 10 & 10 faciunt 20. At $\surd q24$, & $-\surd q24$. Se mutuo tollunt, propter diuerſa ſigna + & —. Poſtremo multiplica $\surd q(10 + \surd q24)$ in $\surd q(10 - \surd q24)$ per 4. ſec. Eucl. vt hic vides.

$$\begin{array}{c} \surd q(10 + \surd q24) \\ \underline{\surd q(10 - \surd q24)} \\ 100 - 24 \\ 100 \\ \underline{24} \\ 76 \end{array}$$

Nam particularum quadrata ſunt 100 & 24. At verò 10 in $+\surd q24$ facit $\surd q2400$: 10 autem in $-\surd q24$, facit $-\surd q2400$, quæ ſe mutuo tollunt, propter diuerſa ſigna. Subtractis tandem 24 ex 100, reſtant 76: cuius duplum, eſt 304: Ergo quod ex multiplicatione $\surd q(+\surd q24)$ in $\surd q(10 - \surd q24)$ fit, eſt $20 + \surd q304$. Duplicaui autem 76, propter duplicem poſitum.

In diuiſione reducitur, tam diuiſor, quam diuidendus ad quadratum, poſtea fit diuiſio, vt ſupra. Sint enim $\sqrt{q}(72 + \sqrt{q}162)$ diuidenda per 3, quadrata ſunt $72 + \sqrt{q}162$, & 9. Diuiſis ergo 72 per 9, proueniunt 8. diuiſis verò $\sqrt{q}162$, per $\sqrt{q}81$, proueniunt $\sqrt{q}2$: ergo quotus eſt, $\sqrt{q}(8 + \sqrt{q}2.)$

Additio, & ſubtractio, fiunt per ſigna + & —; nam aliter fieri commode non poſſunt, niſi in binomijs, & reſiduis, vbi per omnia fiunt, vt de multiplicatione binomiorum, & reſiduorum, iam iam diximus.

Nam ſi $\sqrt{q}(10 + \sqrt{q}24)$ & $\sqrt{q}(10 - \sqrt{q}24)$ addenda ſint, fient per multiplicationem $20 + \sqrt{q}304$, cuius radix $\sqrt{q}(20 + \sqrt{q}304,)$ eſt eorum ſumma. Si vero $\sqrt{q}(10 - \sqrt{q}24)$ ex $\sqrt{q}(10 + \sqrt{q}24)$ ſint ſubtrahenda, reſtant $20 - \sqrt{q}304$, cuius radix $\sqrt{q}(20 - \sqrt{q}304)$ eſt reſiduum.

ANNOTATIO DE FRACTIS.

De fractis hic nihil occurrit præcipiendum, ſicut nec in ſuperioribus, niſi quod eorum reductio, Additio, Subtractio, &c. per omnia fiant, vt de abſolutis rationalibus dictum eſt, dummodo habeatur ratio ſignorum, & characterum.

ARTICVLVS VI.

DE BINOMIIS ET reſiduis.

Binomium eſt numerus rationalis conſtans duobus nominibus, potentia tantum commenſurabilibus. Ab Euclide in 10 element. Sex duntaxat binomiorum, & reſi-

reſiduorum ſpecies recenſentur. Tres priores fiunt, quando quadratum maioris nominis ad exceſſum ſupra quadratum minoris, eſt, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. Tres poſteriores, quando quadratum maioris nominis, ad dictum exceſſum, non eſt, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. *Primum* binomium eſt, quando maius nomen eſt longitudine, minus potentia rationale.

Secundum, quando maius eſt potentia, minus longitudine rationale.

Tertium, quando vtrumque potentia eſt rationale.

Idem de quarto, quinto, & ſexto intellige, vt hic cernis.

Binomia	Apotomae
1. 3 + √q 5.	1. 3 — √q 5
2. √q 12 + 3.	2. √q 12 — 3.
3. √q 8 + √q 6.	3. √q 8 — √q 6.
4. 5 + √q 20.	4. 5 — √q 20.
5. √q 14 + 3.	5. √q 14 — 3.
6. √q 10 + √q 7.	6. √q 10 — √q 7.

Sex binomiorum ſpeciebus, reſpondent totidem reſiduorum, ſiue Apotomarum ſpecies. Vide plura apud Clau. in Alg. cap. 27.

Articvlvs VII.

De radicum extractione ex binomiis, & reſiduis.

Primò. *Ex differentia quadratorum vtriuſque nomini extrahe radicem quadratam.*

Secundò. *Radicem inuentam, tum maiori nomini adde, tum ab illo ſubtrahe.*

Tertiò. *Radicem quadratam ſemiſsis illius ſumma coniunge cum radice quadrata ſemiſsis illius relicti per ſignum* ✠, *ſi fuerit binomium. Diſiunge per* —, *ſi fuerit apotome.* Sit radix extrahenda ex hoc binomio 14 + ✓q180. Quadrata particularum ſunt 196, & 180, differentia 16; differentiæ radix 4, quę addita & ſubtracta maiori nomini conſtat 18; relinquit 10. Horum ſemiſses ſunt 9, & 5; ſemiſsium horum radices 3, & ✓q5. Quibus ſigno ✠ connexis, reſultat radix quæſita 3 + ✓q5, quam ſi duxeris in ſe quadratè, redibit. dictũ binomium 14 + ✓q180. Si fuiſſet apotome hæc 14 — ✓q180, debuiſſent particulæ ſic diſiung. 3 — ✓q5.

Demonſtratio pendet ex 4. prop. ſec. Eucl.

CAPVT II.

In hoc cap. exempla aliquot numerorum irrationalium abſolutorum per propoſitiones proponemus.

PROPOSITIO I.

NVMERVM DATVM PROPORTIOnaliter ſecare.

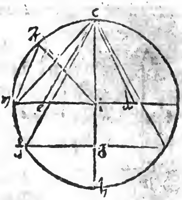
Sit numerus 8 hoc modo ſecandus. Cõiunge quadrata totius numeri 8, & ſemiſsis 4; nẽpe 64, & 16 efficieſq; 80, ex cuius radice ✓q80, ſi ſubtraxeris ſemiſſem, habebis ſegmentum maius ✓q80 — 4; hoc ſegmentũ ſubtractũ ex toto numero, relinquit ſegmẽtũ minus 12 — ✓q 80. Hanc ſectionẽ veram eſſe, oſtenditur tum ex 11. ſec. Euclid. tum per additionẽ partium; tum per ductũ maioris ſegmẽti in ſe, & minoris in totũ. Nam ex additione

ſeg-

ſegmentorum conflatur numerus totus 8; & tam ex ductu maioris in ſe; quam ex ductu minoris in totũ, producitur hic numerus 96 — ✓q5120, qui eſt reſiduum primum, eius radix eſt ✓q80—4.

PROPOSITIO II.

DATA DIAMETRO CIRCVLI LATERA hexagoni, tetragoni, trigoni, pentagoni, octogoni, & decagoni inuenire.



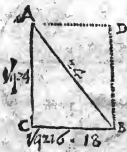
Sit diametrus a b 12 pedũ: erit igitur ſemediameter b i 6 & tantum etiã eſt latus hexagoni per 15. quarti Euclid. Diuidatur ſimidiameter b i in d biſariã, ducta recta d c, eritq; d i, 3 pedum: ergo d c erit ✓q45 per 47. primi. Nã eius quadratum 45, æquale eſt quadratis ipſarum d i i c; quarum hæc eſt 6; illa 3 pedum. Abſcindatur d e, ipſi d c æqualis, ex qua ſi ſubtrahatur d i, erit i e ✓q45—3, quæ eſt latus decagoni per 9. decimi tertij, cum b e in i ſit ſecta proportionaliter per 11. ſec. Rurſus quia quadratum ipſius c e æquale eſt quadratis ipſarum c i i e per 47. primi; erit c e, ✓q(90—✓q1620) quæ eſt latus pentagoni, per 10. decimi tertij. Latus tetragoni a c facile per 47 primi reperitur, eſt enim ✓q72. Latus de-

 nique

nique trigoni c f, erit per 12. decimi tertij ✓q108, eſt enim potentia triplum ſemediametri b i per 12 duodec. Latus octogoni a k ſic inuenitur. Cum a c ſit ✓q 72, erit a l ✓q18, cui cum æqualis ſit i l, relinquet i l ex i k ſubtracta k l, 6—✓ q18. Notis ergo a l, l k, erit a k, ✓q (72—✓q2592) latus octogoni.

PROPOSITIO III.

DATIS TRIANGVLI RECTANGVLI duobus lateribus, latus tertium, & aream inuenire.

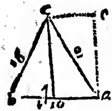


Sit triangulum a b c rectangulum, ſitque latus a b 24: b c 18 pedum: erit igitur per 47 primi, ac ✓q252. Et quia per 41 primi parallelogrammum c d duplum eſt trianguli a c b, ſit autem area parallelogrammi ex ductu laterum b c, c a in ſe: ergo area trianguli naſcetur ex ductu lateris a c in ſemiſsem b c; vel contra, ſemiſsis lateris b c eſt 9 pedum: ductis ergo 9, hoc eſt ✓q81 in ✓q252, prouenit area trianguli ✓q8:0412. Sit ſecundo latus c b, ✓q216; i a ✓ q 24 erunt ergo eorum quadrata 216, 24: ergo quadratum lateris a b, erit 240: ergo latus ipſum ✓q240.

Et quia ex ductu lateris a c in ſemiſſem lateris c b, vel contra, producitur area trianguli, & eſt ſemiſsis lateris b c, ✓q 54, fit vt area trianguli ſit ✓ q 1296, ſiue 36.

Propositio IV.

Datis trianguli æquilateri, vel iſoſcelis omnibus lateribus, aream inuenire.

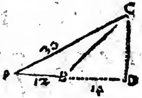


Sint trianguli æquilateri a b c omnia latera decem pedum. Diuiſa ergo baſi a b in d bifariam, erit per 41. primi parallelogrammum d e, æquale triangulo a b c: area autem parallelogrammi creatur ex ductu lateris a d in latus d c: ergo & area trianguli a b c. In triangulo a d c rectangulo, latera a d, a c ſunt nota, hoc 10, illud 5 pedum: erit igitur per 47 primi perpendiculum d c, √q75, quo ducto in latus a d, proueniunt √q 1875, area trianguli a b c. Si baſis a b ſtatuatur √q80, erit area trianguli a b c √q1500. Nam ſemiſsis baſis √q20 ducta in √q75 d c producit √q1500.

Propositio V.

Datis trianguli ſcaleni duobus lateribus, vna cum linea in directum baſi ducta, in quam cadit perpendiculum ex angulo baſi oppoſito dimiſſum, aream inuenire.

Sint

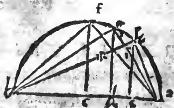


Sint trianguli a b c ſcaleni latera a c 30; a b 12 pedum: exterior linea b d 14. Sunt igitur in triangulo rectangulo a d c duo latera a c, a d nota; a c quidē 30; a d vero 26 pedum. Quare c d erit ✓q224 per 47. primi; b c verò ✓q420. Et quia per 41 primi, triangulum a b c æquale eſt parallelogrammo ſub d c, & ſemiſſe ipſius a b contento, ſi ducatur d c in 6 hoc eſt, ✓q224 in ✓q36, prouenient ✓q8064, area trianguli a b c.

PROPOSITIO VI.

LATERA QVINQVE CORPORUM regularium eidem ſphæræ inſcriptorum, data ſphæræ diametro inuenire.

Ponatur diametrus a b 30 partium, quæ diuidatur in c biſariam: in d ita, vt a d ſit tertia; in e, vt a e ſit quinta pars diametri. Ductis perpendicularibus f c, g d, h e, & iunctis b f, bg, b h; a f, a g, a h, diuidantur a h, a g proportionaliter in o; & i per 11 ſec. & maius ſegmentum ipſius a h traſferatur ex h in k, ducta a k.



Quo facto, erit b g latus tetrahedri, b f octahedri; a g cubi; a k icoſahedri, a i dodecahedri. Poſita namque diametro 30 partium, erit d g, cum inter a d, d b ſit media proportionalis, ✓q200; b g latus tetrahedri, ✓q600;

$\sqrt{q}\,600$; bf, $\sqrt{q}\,450$; ag $\sqrt{q}\,3\,00$; ah, $\sqrt{q}\,180$, cuius maius ſegmētū eſt æquale ipſi hk, quod eſt, $15 - \sqrt{q}\,45$. Datis ergo ah, hk, dabitur & ak $\sqrt{q}\,(450 - \sqrt{q}\,40500)$ latus icoſahedri. Deniq; ag eſt $\sqrt{q}\,300$, cuius maius ſegmentum ai, $\sqrt{q}\,375 - \sqrt{q}\,75$, eſt latus dedocahedri. Videatur 18. propoſ. 13. Euclid.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

LIBER QVARTVS.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS coſſicis.

NVmeri irrationales coſſici duplici notãtur charactere, hoc modo, $\sqrt{q}\,20$ ze, quorum prior ſignificat radicem quadratam ex 20, ſecundus 20. radices ipſe verò numerus ſic pronuntiatur. Radix quadrata viginti radicum. Poſſunt numeri irrationales coſſici, pro ratione valoris vnius radicis, interdum eſſe rationales. Vt ſi huius $\sqrt{q}\,20$ ze, vna radix valeret 5. eſſet ipſe rationalis, quod quinquies 20 faciant 100, qui numerus quadratus eſt, & pro radice habet 10. Sà vero vna radix valeret 4, irrationalis eſſet, quoniam $\sqrt{q}\,80$ ze, qui ex 20 & 4. creatur, non eſt numerus quadratus. De his numeris duo breuiter pertractabo.

Primum eſt calculus, *alterum* vſus & praxis.

CAPVT

Capvt I.

DE CALCVLO IRRATIONALIVM *coſsicorum.*

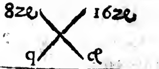
Componitur horum numerorum calculus ex triplici calculo, nimirum ex calculo rationalium coſsicorum, & abſolutorum, atque ex irrationalium abſolutorum.

Si enim incommenſurabiles fuerint, fit additio per +; ſubtractio per —. Si commenſurabiles & eoſdem characteres coſsicos habuerint adduntur & ſubtrahuntur, vt commenſurabiles irrationales abſoluti. Vt ſi √q8ze ad √q18ze addantur, fient √q50ze. Si √q8ze ſubtrahantur ex √q50, reſtant √q8ze.

Multiplicatio, & diuiſio fit etiam, vt in ſuperioribus, ſi eoſdem habeant characteres radicales. Si diuerſos, ante operationem ad eoſdem reuocantur, vt ſupra etiam factum eſt. Exemplum ſi ſint √q12ze in √q8ze ducenda, fient √q96q. Si 6ze in √q18q, fient, √q648c. Si √q96q ſint per √q8ze diuidenda, prouenient √q12ze, Si √q648c per √q18q, prouenient √q36ze, hoc eſt 6ze.

Si characteres radicales ſint diuerſi reducuntur prius ad eoſdem. Vt ſi ſint √q8ze per √c16ze multiplicanda, reducantur hoc modo.

Numeri cum characteribus coſsicis ponuntur ſupra, characteres radicales infra. Deinde fit multiplicatio per crucem, iuxta characteres per crucē re-



√qc256q + √qc512ze

ſpon-

ſpondentes. Vt quia 8 ze reſpondet per crucem character cc, ducenda ſunt 8 ze ad cubum. 16 ze verò propter characterem q, per crucem reſpondentem, ad quadratum. Deinde vtrique producto addendus vterque character radicalis. Coſsicus vero mutatur, vt ſupra de multiplicatione coſsicorum eſt dictum. Operatione hoc modo abſoluta, proueniunt √ qcc256q + √qcc512 cc; quibus in ſe ductis producuntur √qcc131072 ß. Quod ſi √qcc131072 ß per √qcc 256q ſint diuidenda, prouenient √qcc512 cc.

CAPVT II.

DE VSV ET PRAXI NVmerorum irrationalium coſſicorum.

PROPOSITIO I.

EST QVADRATVM, CVIVS LATVS, & diametrus ſimul faciunt 10. Quaro quantum ſit latus, quanta diametrus?

Pono latus 1 ze: Ergo erit diametrus 10 — 1 ze. Et quia per 47 primi quadratum diametri eſt duplum quadrati lateris, eſtque quadratum lateris 1q; quadratum diametri 100 — 20 ze + 1q, erunt hæc 2q, his 100 — 20 ze + 1q æqualia; & facta reductione hoc 1 q, his

100

100—20ze. Semiſsis numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100, additum abſoluto 100 facit 200, cui ſi addatur ſemiſsis numeri radicũ, erit latus ✓q200— 10, quod ex 10 ſubtractum, relinquit diametrum 20—✓q 200.

Propositio II.

Est qvadratvm, cvivs latus ductum in differentiam lateris, & diametri, producit 10, quæro latus, & diametrum.

Pono latus 1 ze, per quod ſi diuidantur 10, prodit differentia lateris, & diametri $\frac{10}{1ze}$, cui ſi addatur 1 ze prodit diametrus $\frac{10}{1ze}$ + 1ze, ſiue (particulis ad eandem denominationem ductis) $\frac{10+1q}{1ze}$, huius quadratum $\frac{100+20q+1qq}{1q}$, cum quadrati lateris ſit duplum, erit inter 2q, & $\frac{100+20q+1qq}{1q}$ æqualitas. Quæ ſi ad eandem denominationem reducantur, & communis denominator tollatur, erit etiam inter 2qq, & 100 + 20q + 1qq æqualitas, & reductione facta, inter 1qq, & 100 + 20q. Diuiſis ergo 100 + 20q per 1qq, proueniunt 100 + 20q. Semiſsis numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100 additum abſoluto facit 200; cuius radici ✓q 200 ſi addatur ſemiſsis numeri radicum, conflantur ✓q200 + 10, quadratum lateris: ergo quadratum diametri eſt ✓q800 + 20; adeoque diametrus ✓q(✓q800 + 20,) & latus ✓q(✓q200 + 10.)

Sub-

Subtractum latus ex diametro relinquit √q(√q800+20)—√q(√q200+10) Ducto iam latere √q(√q200+10,) in √q(√q800+20)—√q(√q200+10,) producuntur 10. Quæ multiplicatio fit hoc modo.

Ex √q(√q200+10) in—√q(√q200+10) fit quadratum lateris, tollitur enim dũtaxat character ante parentheſin, & propter diuerſa ſigna, ponitur ſignum hoc—. Ductis verò √q(√q800+20) in √q(√q200+10) producuntur √q(√q160000+√q80000+√q89000+200;) ſiue √q(√q160000+320000+200,) & radice ipſius √q160000, addita ad 200, fit hoc binomium (600+√q320000) cuiusbinomij radix eſt 20+√200: vnde ſi tollam—√q200+10, nempe quadratum lateris (√q√q200+10, reſtant 10.

√q(√q800+20)—√q200+10)
√q(√q200+10)+√q(√q200+10)

—√q200+10

Propositio III.

Diuidatur numerus 100 in duas partes, quæ in ſe ductæ progignant 1000.

Pono primã partẽ 1ƺ: erit igitur altera 100—1ƺ. hæ partes in ſe ductæ faciunt 100 ƺ—1q, quæ ſunt his 1000 æqualia, & facta reductione hoc 1q, his 100ƺ—1000. Si ex quadrato ſemiſsis numeri radicum, nempe ex 2500 ſubtrahatur abſolutus, reſtant 1500. Cuius numeri radix quadrata √q1500, ſi addatur, & ſubtra-

hatur ſemiſsi numeri radicum, exurgunt partes, maior 50+√q1500; minor 50—√q1500. Hæ partes additæ faciunt 100. in ſe verò ductæ procreant 1000.

Propositio IV.

Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes in ſe ductæ; faciant 52+√q2048.

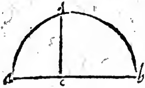
Eſto pars prima 1ze: igitur altera erit 20—1ze. Hę partes in ſe ductæ faciant 20ze—1q, æqualia his 52 +√q2048. Facta reductione erit hoc 1q, his 20ze—52 —√q2048 ęquale. Ex quo numero radix ſic extrahitur. Subtraho ex quadrato ſemiſsis numeri radicum, nempe ex 100, abſolutum—52—√q2048, & reſtant 48—√q 2048, huius numeri radix eſt √32—4. Nam ſi quadratum minoris particulæ ex quadrato maioris ſubtrahatur, reſtant 256, cuius radix quadrata, ſi addatur, & ſubtrahatur maiori particulæ, fient 64—32: horum dimidia ſunt 32—26, radices √q32—4. Quæ ſi ſubtrahātur ex ſemiſſe numeri radicum, nempe ex 10, reſtabunt 14—√q32; ſi eidem addantur, fient 6+√q32. Hæ igitur duæ partes cum in ſe ductæ faciant 52+√ q2048; additæ, conſlant 20, bene operati ſumus.

Propositio V.

Eſt circulus, cuius diametrus eſt 20 partium, quæ verò ex peripheria in diametrum demittitur eſt √q(76—√q320) quæro quæ ſint partes diametri à perpendiculari factæ

Eſto

Eſto circulus a d b, diametrus a b, perpendicularis ex d in diametrum demiſſa d c: quæro quantæ ſint a c, c b? Pono a, c eſſe 1ƺ: erit igitur c b 20 — 1ƺ. Et quia quod fit ex a c in c b æquale eſt quadrato ipſius c d per 13 ſexti; erit inter 20ƺ — 1q, & 76 — √q320 æqualitas



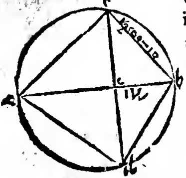
(quadratur enim, √q(76 — √q 320) ſi prior character auferatur.) Ergo reductione facta, erit quoque æqualitas inter 1q, & 20ƺ — 76 + √q320. Ex numero ergo 20ƺ — 76 + √q320 ſic educitur radix quadrata. Semiſſis numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100; ex quo ſi ſubtrahantur —76 + √q320, reſtant 24 + √q320. Ex hoc binomio educitur radix hoc modo. Quadrata particularum ſunt 576. 320; differentia 256, cuius radix quadrata 16 addita, & ſubtracta maiori nomini conſtat 40, relinquit 8; ſemiſſes ſunt 20 & 4, eorum radices √q 20 + 2; quæ ſi ad ſemiſſem numeri radicum, nempe ad 10 addantur, fiunt 12 + √q20, pars maior, quæ ſi ſubtrahatur ex 20, reſtat 8 — √q20 pars minor.

PROPOSITIO VI.

EST CIRCVLVS, CVIVS DIAMEtrus linea perpendiculari proportionaliter eſt ſecta, & vna minorum chordarum eſt √q500 — 10; quæritur quanta ſit diametrus & reliqua linea.

Sit chorda b c √q500 — 10 partium, & quærantur a c e b, a b, c a, c e. Quia a b in e proportionaliter eſt ſecta,

erit, vt a b ad a e; ita a c ad e b; ſed quoque eſt, vt a b ad b c; ita b c ad b e, quod triangula a c b, b c e ſint æquiangula per 8 ſexti: ergo a e, b c ſunt æquales. Quia verò b c ponitur √q 500—10; erit & a e totidem partium. Ponatur e b 1 ƺe. Cum itaque e c inter a e, e b ſit media proportionalis, erit ipſius quadratum æquale rectangulo ipſis a e, e b contento. Item cum triangulum b c e ſit rectangulũ, erit quoq; quadratum ipſius e c æquale quadrato ipſius b c, minus quadrato ipſius e b:



ergo hoc √q500q—10ƺe, huic 600—√q200000—1q eſt æquale, ac facta reductione hęc 600—√q200000—√q500q—10ƺe, huic 1q. Extrahẽda iam eſt radix ex hoc numero 600—√q200000—√q500q—10ƺe, cuius membrũ hoc 600—√q200000 eſt numerus abſolutus; hoc, —√q500q—10ƺe, numerus radicum, cuius ſemiſsis eſt —√q125—5. Ad ſemiſsis quadratum, quod eſt + 150—√q12500, additus abſolutus, conſlat 750—√q312500.

Additur autem abſolutus cum primarium ſignũ ſit +, licet ſecundarium ſit —. Antequam autem ex hoc reſiduo, 750—√q312500, ſubtrahamus ſemiſſem numeri radicũ, extrahẽda prius eſt eſt illo radix quadrata. Differentia igitur quadratorum eſt 250000, eius radix 500 addita, & ſubtracta maiori nomini, conſlat 1250; relinquit 250. Semiſſes ſunt 625, 125. Radices ſemiſsium 25, √q125, quæ copulatæ ſigno —, ſic habent

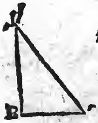
25 —

25—√q125. Vnde ſi ſubtrahatur ſemiſsis numeri radicum, ſcilicet √q125—5, reſtant 30—√q500, pars minor e b. Cum ergo maior ſit √q500—10; erit tota a b, 20. E c √q (√q 800000—800.) Si enim quadratum ipſius b e, quod eſt 1400—√q 1800000 ex quadrato ipſius b c, quod eſt, 600—√q200000 tollatur, relinquetur quadratum ipſius e c, quod eſt √q800000—800. Additis verò quadratis ipſarum a e, e c conflatur quadratum ipſius a c √q200000—200; ergo ipſa a c erit √q (√q200000—200.)

Si ponatur diametrus a b 12ℒ, inuenietur æquatio inter 1q, & 600—√q200000 + √q500q—10ℒ; ac tandem extractis radicibus, erit ſemiſsis numeri radicum √q125—5, non ex 25—√q125 ſubtrahenda, ſed addẽda: quo facto exurgit diametrus 20 partium.

Propositio VII.

Eſt triangulum rectangulum, cuius baſis eſt 10—√q28 partium, ſumma reliquorum laterum 26 + √q28: quæritur quantum ſit quodlibet reliquorum.



Eſto triangulum a b c, cuius baſis b c ſit 10—√q28: ſumma reliquorum 26 + √q28. Pono, a c quod angulo recto opponitur, eſſe 12ℒ: erit igitur a b 26 + √q28—12ℒ. Et quia quadratum lateris A C eſt æquale, laterum A B, B C quadratis. Et eſt quadratum ipſius A C 1q: quadratum ipſius A B 704 + √q75712—√q112q — 52 ℒ + 1q:

1q: ipſius B C, 128—√q1 1200. Summa vtriuſq; A B, B C, 832+√q28672—√q1 12q—522e + 1q, quæ eſt æqualis ipſi 1q. Facta reductione, erunt hæc 832 + √q 28672, his 52 2e + √q1 12q æqualia. Diuiſis ergo 832 + √q28672 per 522e + √1 12q, proueniũt 16, A C, quod ponebatur 1 2e. Fit autem diuiſio hoc modo. Iuxta illa, quæ cap. 1. art. 4. lib. 3. de diuiſione dicta ſunt, mutetur ſignum + poſterioris particulæ diuiſoris in—, hoc modo 522e—√q1 12q, atque in diuiſorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuiſor, quam diuidendus, & inuenietur nouus diuiſor 2592; & nouus diuidendus 41472. Facta iam diuiſione, prouenit quotus 16, latus A C. Quod ſi ſubtrahatur ex 26 + √q28, reſtant 10 + √q 28, latus A B.

APPENDIX.

DE CALCVLO Aſtronomico

CAlculus aſtronomicus comprehẽdit motus, & tempora: vtraq; reperiuntur in orbibus cæleſtibus, quæritur enim, aut quanto tempore datus aliquis motus abſoluatur, aut quantus motus in dato aliquo tempore peragatur. In motu conſiderantur ſigna, gradus, minuta, ſecunda, tertia, quarta &c. Signum aut eſt phyſicum, aut commune. Phyſicum, eſt ſexta pars circuli, continetque gradus 60 (nam totus circulus apud aſtronomos diuiditu

tu

tur 360 partes æquales, quas gradus appellant) Commune eſt duodecima pars circuli, continetque gradus 30. Gradus eſt trecenteſima ſexageſima pars circuli. Habet itaque circulus 12 ſigna communia : ſignum commune 30 gradus: gradus 60 minuta: minutum 60 ſecunda ; ſecundum 60 tertia &c. gradus ſignantur hoc ſigno °. Minuta hoc ′. ſecunda hoc ″. tertia hoc ‴. &c. Alij minuta vocant ſcrupula prima, ſecunda ſcrupula ſecunda, tertia ſcrupula tertia &c.

Tempus diuiditur in annos ; menſes, dies, horas , minuta , ſecunda &c. Annus aut eſt aſtronomicus , aut ciuilis. Aſtronomicus ſecundum varios eſt varius. Alphonſini putant eſſe 365 dierum, 5 horarum, 49 minutorum, 16 ſecundorum . Ciuilis eſt duplex , communis & biſſextus. Communis habet dies 365, biſſextus 366 . Menſis eſt dierum 31, aut 30, aut 28, aut etiam 29. Dies habet horas 24 , hora minuta 60, minutum 60 ſecunda, &c.

Habent prætérea tam gradus, quam anni, & dies ſexagenas. Sexagena diuiditur in primam, ſecundam, tertiam &c.

Exempli cauſa 776000 gradus habent 3 ſexagenas tertias, 35 ſecundas, 33 primas, & prætereà 20 gradus. Diuiſis enim 776000 per 60, proueniunt 12933 ſexagenæ primæ, reſtant 20 gradus. Diuiſis verò 12933 per 60, proueniunt 215 ſexagenæ ſecundæ, reſtant 33 ſexagenæ primæ. Denique diuiſis 215 per 60, proueniunt 3 ſexagenæ tertiæ, reſtant 35 ſexagenæ ſecundæ.

Item 590173 dies habent ſexagenas tertias 2, ſecundas 43, primas 46, dies 13. Nam diuiſis 590173 per 60, proueniunt 9836 ſexagenæ primæ, reſtant dies 13. Diuiſis vero 9836 per 60, proueniunt ſexagenæ ſecundæ 163, reſtant primæ 56. Diuiſis denique 163 per 60, proueniunt ſexagenæ tertiæ 2, reſtant ſecundæ 43. Anni 1616 habent ſexagenas primas 26, dies 56. Diuiſis enim 1616 per 60, proueniunt 26, reſtant 56 anni.

DE ADDITIONE ET ſubtractione.

In additione, & ſubtractione primo ſuppone ſibi mutuo numeros eiuſdem ſpeciei, vt ſigna

ſigna ſignis, gradus gradibus, dies diebus, minuta minutis, ſecunda ſecundis &c.

Secundo, incipe à minimis, quæ verſus dextram poni ſolent, & in additione ſummam factam, ſi ſcrupula fuerint, diuide per 60; quotum ſerua pro ſequente operatione, reſiduum pone infra lineam. Si fuerint gradus, diuide ſummam per 30. ſi ſigna per 12, & quotum tanquam inutilem, omnino abijce, niſi in certis caſibus fuerit memoria conſeruãdus: ſi horæ per 24; ſi dies per 365, vt proueniant anni communes. Exemplum. volo addere, quæ in hac formula vides. Primo addo ſecunda, & conflo 101, quibus per 60 diuiſis, prouenit 1, reſtant 41, quæ pono ſub ſecundis. Et 1 pro ſequente operatione reſeruo.

S.	°	′	″
9	23	42	51
3	17	31	46
7	9	58	4
8	21	12	41

Deinde addo minuta, ijſque prius ſeruatum addo, & conflo 132, quibus per 60 diuiſis, proueniunt 2, reſtant 12. pono ergo 12 ſub minutis, reſeruo 2. Tertio addo gradus, & 2 prius ſeruata, efficioque 51: quibus per 30 diuiſis quod vnum ſignum commune 30 gradus habeat, pronenit 1, reſtant 21. Igitur 21 ſubſcribo gradibus, 1 reſeruo. Denique addo ſigna

& prius ſeruatum, & conflo 20, vnde reiecto integro circulo, ſeu 12 ſignis, reſtant 8, quæ ſignis, ſuppono.

Nota ſi, vbi ſunt gradus, eſſent dies, ſummam fore per 24 diuidendam.

In ſubtractione, quãdo inferior eſt maior ſuperiore, debet ad ſuperiorẽ ex proximis verſus ſiniſtrã poſitis aſſumi vnitas, quæ valet aut 60, aut 30, aut 24. Sexaginta ſi addãtur ſcrupula, aut gradus ſignorũ phyſicorũ 30; ſi addãtur gradus ſignorũ cõmuniũ. 24 ſi horæ. Quæ vnitas cum ad ſigna aſſumitur, valet 12, aut 6, prout ſignũ fuerit commune, aut phyſicum.

Primum exemplum. Sint 23 D. 8 H. 54′ 47″ ex 28 D. 4 H. 35′ 15″ ſubtrahenda. Quia ſecunda inferiora ſuperant ſuperiora, addo ſuperioribus 60, vt fiãt 75, ex quibus ſi ſubtrahã 47, reſtant 28. Rurſus quia 54′ excedunt 34′ (34′ inquam, quia ex 35′ vnum ablatum antea fuit) addo 60, vt fiant 94, vnde ſubtractis 54′, reſtant 40′. Iterum, quia 8 H excedunt 3, (non 4, quod vna antea ſublata ſit) addo 24, vt fiãt 27: vnde ſubtractis 8H. reſtãt 19H. Denique ſublatis 23 diebus, ex 27 D, reſtant 4 D.

D.	H.	′	″
28.	4.	35.	15.
23.	8.	54.	47.
4.	19.	40.	28.

Secun

Secundum exemplum. Sint 9S. 18°. 22'. 32'', ex 3S 24°. 47'. 53''. ſubtrahenda. Subtractis ſecundis ex ſecundis reſtant 21''. Minutis ex minutis, 25'. gradibus ex gradibus, 6°. Vt verò ſubtrahas 9 ſigna ex 3, adde 12 ab 3, vt fiant 15, vnde ſubtractis 9, reſtant 6 ſigna.

S.	°:	':	'':
3.	24.	47.	53
9.	18.	22.	23
6.	6.	25.	21

DE MVLTIPLICATIONE ET diuiſione.

Circa Multiplicationem, & Diuiſionem nota primo gradus pro nota habere hanc circularem figurã °. Minuta hanc '. Secnnda hanc ''. Tertia hanc '''. Quarta hãc ''''. Quinta hãc v, &c. vt ſupra monui. Sexagenas primas hanc ', Sexagenas ſecundas hanc ''. Tertias hanc '''. &c.

Nota *ſecundo*, in multiplicatione, ſi notæ vtriuſq; multiplicantis eiuſdem ſint ſpeciei, hoc eſt, ſi vterq; multiplicans habeat notas tantum tales '', ''', vi, &c: aut tantum tales, '', '''. &c. eas eſſe addendas: ſi diuerſas, minorem ex maiore ſubtrahendam, vt habeatur producti nota.

Tertiò.

Tertiò, quando dies in motum diurnum, aut anni in annum ducuntur, habere tam dies, quam annos notam hanc°.

Quartò, initium à minimis faciendum; productum diuidendum per 60. Quotum operationi ſequenti reſeruandum. Ac demum reſiduum infra lineam ponendum.

Exemplum. Volo motum diurnum ſolis, qui eſt $\overset{i}{59}.\ \overset{ii}{8}.\ \overset{iii}{11}.\ \overset{iiii}{22}.\ \overset{v}{16}.\ \overset{vi}{11}.\ \overset{vii}{15}.$ ducere in 365 dies; ſiue in 6 ſexagenas primas dierum, & 5 dies, vt habeatur motus annuus. Sic igitur progredior. Duco 6 ſexagenas in $\overset{vii}{15}$, & produco $\overset{vi}{90}$. quibus per 60. diuiſis,

		i	ii	iii	iiii	v	vi	vii	
		59.	8.	11.	22.	16.	11.	15.	
								6	
ı	o								
5.	54.	49.	8.	13.	37.	7.	30.		
	4.	55.	40.	56.	51.	20.	56.	15.	
5.	59	44.	49.	10.	28.	28.	26.	15	

prouenit $\overset{v}{1}$, reſtant $\overset{vi}{30}$. Pono igitur $\overset{vi}{30}$ infra ſexta, retineo $\overset{v}{1}$ pro ſequente operatione. Secundo duco 6 in $\overset{vi}{11}$, & produco $\overset{v}{66}$, addo $\overset{v}{1}$ prius retentum, & efficio 67, quibus per 60 diuiſis, prouenit $\overset{iiii}{1}$, reſtant $\overset{v}{7}$. Poſitis igitur 7 infra quinta; reſeruato $\overset{iiii}{1}$, duco in $\overset{v}{16}$ & produco $\overset{iiii}{96}$, addo $\overset{iiii}{1}$ prius retentum, & con-

ſio 97^{IIII}; quibus per 60 diuiſis, prouenit 1^{IIII}; reſtant 37^{IIII}, &c. Ducto eodem modo motu diurno in dies 5, produco $4^{o}.\,55^{I}.\,40^{II}.\,56^{III}.\,51^{IIII}.\,20^{V}.\,56^{VI}\;15^{VII}$. quæ ſi addātur prioribus, prouenit motus ſolis annuus, vt in formula apparet.

Ratio autem, cur ductis 6^{I} ſexagenis in 15^{VII} proueniant 90^{VI} eſt, quod ſubtracta nota hac ^{I} ex his ^{VII} reſtet nota hæc ^{VI}.

Habito motu annuo habebitur motus 60 annorum communium, ſi notæ ſcrupulorum vnitate minuantur, ſexagenarum augeātur, hoc modo $5^{II}.\,59^{I}.\,44^{o}.\,49^{I}.\,10^{II}.\,28^{III}.\,28^{IIII}.\,26^{V}.\,15^{VI}$ cui motui ſi addatur motus 15 dierum, prodibit motus 60 annorum noſtrorum. Motus 15 dierum eſt $14^{o}.\,47^{I}.\,2^{II}.\,50^{III}.\,34^{IIII}.\,2^{V}.\,48^{VI}.\,45^{VII}$ hic motus additus motui 60 annorum communium conflat motum annorum 60 noſtrorum ſiue Iulianorum hunc $5^{II}.\,59^{I}.\,59^{o}.\,36^{I}.\,13^{II}.\,19^{III}.\,2^{IIII}.\,29^{V}.\,3^{VI}.\,45^{VII}$. Si rurſus notę ſcrupulorum vnitate minuantur, ſexagenarum augeantur, exurget motus 3600 annorum Iulianorum, hic $5^{III}\;59^{II}.\,59^{I}.\,36^{o}.\,13^{I}.\,19^{II}.\,2^{III}.\,29^{IIII}.\,3^{V}\;45^{VI}$. ex quo ſi motus 27 dierum tollatur, relinquitur motus 3600 annorum Gregorianorum, hic $5^{III}.\,59^{II}.\,59^{I}.\,9^{o}.\,36^{I}.\,37^{II}$.

i ii iii iiii v vi vii, o i ii
36.37.55.27.46.41.15. Motus dierum 27 eſt.26.36.41.
iii iiii v vi vii
7.1.17.3.45. Tolli autem debet ex motu 3600 annorum Iulianorum motus 27 dierum, quod 3600 anni Iuliani, ſiue veteris Calendarij excedant 3600 annos Gregorianos, ſiue noui Calendarij, 27 diebus. Centum annorum motum habebis, ſi motum 60 annorum Iulianorum, motus item 40 annorum communium, & 10 dierum coniungas, vt hic apparet.

''	'	o	i	ii	iii	iiii	v	vi	vii	
5	59	59	36	13	19	2	29	3	45	60: an.
3	59	49	52	46	58	58	57	30	0	40. an.
		9	51	21	53	42	41	52	30	10. d.
9	59	59	20	22	11	44	8	26	15	

Ideo autem motibus annorum 60 Iulianorum, & 40 communium addi debet motus 10 dierum, quod 40 anni communes habeant 10 dies intercalares. Si motum 100 annorum: ſi motus 100, & 200 annorum coniungas, habebis motum 300 annorum &c. Eodem modo menſium, & annorum duorum, trium, quatuor &c. motus colliges.

De Diuiſione, quæ in hæc pragmatia exigui vſus

vſus eſt, has ſpeculationes accipe. *Primo* cum gradus per gradus diuiduntur proueniunt gradus. *Secundò*, cum diuiduntur gradus, ſiue °. per ′. ″. ‴. &c. proueniunt ′. ″. ‴. &c. Et contra cum °, ſiue gradus per ′. ″. ‴. &c. diuiduntur, proueniunt ′. ″. ‴. &c. *Tertiò*, cum diuiduntur ′. ″. ‴. &c. per gradus, proueniunt ′. ″. ‴. &c. cum verò ′. ″. ‴. &c per gradus diuiduntur, proueniunt ′. ″. ‴. &c. *Quartò*, cum diuiſor, & diuidendus habuerint notas eiuſdem ſpeciei, ſuperaueritq; nota diuidendi notam diuiſoris, ſubtrahitur minor ex maiore, eritque reſiduum nota quoti. Si contra nota Diuiſoris ſuperauerit notam diuidendi, fit eadem ſubtractio notarum: ſed ex votis ′. ″. ‴. fiunt ′. ″. ‴. & ex ′. ″. ‴. fiunt ′. ″. ‴.

Quintò Cum ′. ″. ‴. diuiduntur per ′. ″. ‴: aut ′. ″. ‴. per ′. ″. ‴. fit additio notarum, & quotus retinet notam diuidendi. Vt ſi diuidantur ″ per ′, proueniunt ‴. Si ‴ per ″ proueniunt v. Sed hæc de calculo aſtronomico, & vniuerſa Arithmetica ad honorem Dei ter Opt. Max. Et glorioſæ Virg. Matris dicta ſint.

APPENDIX SECVNDA.

DE DIVINATIONIBVS vulgaribus.

Quia

Quia intelligo quoſdam huiuſmodi diuinationibus delectari, placuit in eorum gratiam vnam, aut alteram appendere.

Divinatio I.

Qvomodo nvmervs, qvem quis animo concepit inueſtigetur.

Iube numerum conceptum triplicari: triplicatum ſi par ſit dimidiari: ſi impar addi vnitatem, poſtea dimidiari. Dimidiatum iube rurſus triplicari: triplicatum ſi par ſit dimidiari: ſi impar, addi vnitatem; & poſtea dimidiari. Poſtremum dimidiatum iube diuidi per 9, & quotum tibi dici, quem duc in 4, & producto adde 1. ſi primæ triplicationi addita eſt vnitas: 2, ſi ſecundæ, proditque numerus quem alter animo concepit.

Exemplum. Conceperit 11: quæ triplicato faciunt 33; qui numerus, quia eſt impar, addatur ei vnitas, vt fiant 34. Dimidium eſt 17, quod triplicatum facit 51; ſed quia impar eſt, addatur vnitas, vt fiant 52. dimidium 26 diuiſum per 9 reddit 2, quæ in 4 ducta faciunt 8; quibus, quod vtrique triplicationi addita ſit vnitas, iunge 3, & conficies 11, numerum quem alter animo concepit.

Aliud. Cōceperit quis 10: triplū eſt 30. Dimidium

dium 15.quod triplicatum facit 45.addatur, quia impar, vnitas,vt fiant 46.Cuius dimidium diuiſum per 9. reddit 2.quæ in 4.ducta faciunt 8.quibus, quia ſecundæ triplicationi addita eſt vnitas,iunge 2.& fient 10.numerus conceptus.

Aliud.Conceperit quis 17.triplum eſt 51.cui quod impar,adde 1. vt fiant 52. Dimidium 26. triplicatum facit 78; huius dimidium 39. diuiſum per 9.reddit, quæ in 4 ducta faciunt 16;quibus,quod primæ triplicationi addita ſit vnitas, iunge 1.& prodibunt 17, numerus conceptus.

Aliud.Conceperit quis 20.Triplum eſt 60.dimidium 30;triplum huius 90:dimidium 45,quod diuiſum per 9, reddit,5.quæ ducta in 4,producunt 20, numerum conceptum.

SECVNDA DIVINATIO.

RES ABSCONDITA QVOMODO inueſtigetur.

Sint aliquot perſonæ,quarum vna in certi digiti certo articulo annulum habeat, potes ſcire, quæ perſona,in quo digito,& articulo annulum habeat. Conſtitue apud te certum perſonarũ ordinẽ,quæ nimirũ ſit prima,quæ ſecunda,&c.Idẽ de digitis 10,& 3.articulis facito.Poteſt autem Pollex dextræ primus,pollex ſiniſtræ vltimus intelligi,vt & articulus proximus vngui primus,proximus radici vltimus.His ſic conſtitutis,iube à prima perſona verſus vltimã numerari vſq.ad illã,quę annulũ habet,& numerũ duplicari, duplicato addi 5 hãc ſummã duci in 5; producto addi numerũ articuli,in quo; annulus eſt; hanc ſummam duci in 10, producto addi numerum articuli,in quo annulus eſt:tandem ex tota ſumma ſub-

ima A,ſecunda C,tertia B.Si 5 (neque enim 4 remanere poſsũt)accepit prima B,ſecũda C,tertia A.Si 6,accepit prima C,ſecunda A,tertia B. Si 7, accepit prima C, ſecũda B,tertia A,aſpice hanc tabellam.

1	1	A
	2	B
	3	C
2	1	B
	2	A
	3	C
3	1	A
	2	C
	3	B
5	1	B
	2	C
	3	A
6	1	C
	2	A
	3	B
7	1	C
	2	B
	3	A

Orietur hæc diuinatio ex rerum combinatio nibus. Poſſunt namq; duæ res bis: tres ſexies,quatuor vicies quater, quinq; centies vicies combinari. Vt autẽ ſcias, quot modis quotcũq; res cõbinari poſſint,pone ordine tot numeros, quot sũt res combinandę, incipiendo ab vnitate, eoſq; ſigillatim in ſe ducito, hoc eſt 1.in ſecundũ,productum in tertium, & hoc productum in quartũ. &c. vt ſi ſcire veLis quot modis ſex res cõbinari poſſint, pone 6.numeros hoc ordine 1. 2. 3. 4. 5. 6. Duc 1. in 2. & produces 2; hæc in 3, & produces 6, hæc in 4, & produces 24, hæc in 5, & produces 120, hæc in 6, & produces 720: Poſſunt igitur ſex res, v. g. Sex literæ A, B, C, D, E, F ſeptingenties vicies combinari.

INDEX

INDEX RERVM
PRÆCIPVARVM

Abbreuiatio characterum coſſicorum lib.2.cap.1.a.2 &c.c. 3.a.4
Additio integrorum numerorum lib.1.c.1.a.1
Additio fractorum lib.1.c. 2. art. 3.
Additio proportionum lib.1.cap.3. a. 3.
Additio conſonantiarum lib. 1. c. 4. a. 4
Additio coſſicorum ſimplicium lib.2. c. 1. a. 1
Additio coſſicorum compoſitorum, & diminutorum lib. 2. c.1.a.3
Additio ſecundarum radicum lib.2.cap. 1.a.6
Additio irrationalium ſimplicium lib. 3. c. 1.a.1
Additio irrationalium compoſitorum, & diminutorum li. 3.c.1.a.3
Additio radicum uniuerſalium lib. 3. c. 1.a.5
Additio irrationalium coſſicorum lib.4.c.1
*Additio Aſtronomica, App.*1.
Altera parte longior numerus lib.1.c.4. a. 5
Abſolutus numerus quis lib. 1 .c.4.a.1
Abundans numerus quis lib.1.c. 4.a.1
Algebra unde dicta lib. 2.initio.
Algebra regula & eius partes lib. 2 c.2.a.1.2.3
Alligationis regula lib.1.c.4. a.4
Analogia quid l. 1.c.4.a.4 *Archimedis inuentum* lib.1.c.3.a.3
Æquationis Algebraicæ inuentio lib.2. c.2.a.1
Æquationis Algebraicæ reductio l.2.c.2.a.2.
Æquationis Algebraicæ reſolutio l.2.c.2.a.3.
Apotome quid l. 3. initio.
Biquadratum unde naſcatur lib. 1.c.5.c.4.a.4
Binomium quid lib.3.c. 1.a.6
Characteres coſſici, qui & quomodo creentur l.1.c.5
Columnæ quomodo fiant l.1.c. 4.a.5
Commenſurabilium irrationalium Additio, & Subtractio l.3.c. 1. a 1
*Combinatio rerum in App.*2.
Compoſitus numerus quis l.1.c.4. a. 1.
compoſiti numeri inter ſe qui l.1.c.4.a.1.
Conſonantiæ muſicæ quot & quomodo diuidantur l.1.c.4. a.4
Conſonantiæ muſicæ ex quibus numeris componantur. l.1.c.4. a.4
Conſortij regula l.1.c. 3. a.2
Coſſa unde dicta lib. 2. initio
Cubici numeri quomodo fiant l.1.c.5. & 4.a.4

Cubum

Cubum qui impares conſtituant	l.1.c.4.a.5.in annot.
Cubi ex cognitione quales quæſt. ſoluantur	l.1.c.4.a.5. an. 2
Decagoni latus inuenire	lib.3.c.2.prop.2
Denominator quid	lib.2.cap.2
Διὰ πασῶν quid	l.1.c.4.a.4
Διὰ πέντε quid	l.1.c.4.a.4
Διὰ τεσσάρων quid	l.1.c.4.a.4
Diminutus numerus quis	l.1.c.4.a.1
Diſiunctæ radices quæ	l.3.circa finem
Diuiſio numerorum integrorum	lib.1.c.1.a.5
Diuiſio fractorum	l.1.c.2.a.4
Diuiſio proportionum	l.1.c.4.a.3
Diuiſio coſſicorum ſimplicium	l.2.c.1.a.2
Diuiſio Coſſicorum Compoſit. & Diminut.	l.2.c.1.a.4
Diuiſio ſecundarum radicum	l.2.c.1.a.6
Diuiſio irrationalium ſimplicium	lib.3.c.1.a.2
Diuiſio irrationalium Compoſit. & Diminut.	l.3.c.1.a.4
Diuiſio vniuerſalium	l.3.c.1.a.5
Diuiſio irrationalium coſſicorum	l.4.c.1
Diuiſio aſtronomica	App.1
Diuinatio.	App.26
Elementa Arithmetica quot	lib.1.c.1
Exempla Regulæ proportionis ſimplicis directæ	l.1.c.3.a.1
Exempla regulæ proportionis compoſitæ directæ	l.1.c.3.a.1
Exempla Regulæ Reciprocæ ſimplicis	l.1.c.3.a.1
Exempla Regulæ Reciprocæ compoſitæ	l.1.c.3.a.1
Exempla regulæ Alligationis	l.1.c.3.a.3
Exompla regulæ conſortij	l.1.c.3.a.2
Exempla regulæ vnius poſitionis	l.1.c.3.a.4
Exempla regulæ duplicis poſitionis	l.1.c.3.a.4
Exemple in quibus vel vnitas eſt Diuiſor, vel nulla reductione opus eſt.	l.2.c.3.a.1
Exempla quæ ſola Diuiſio ſoluit	l.2.c.3.a.2
Exempla, quæ extractio radicis ſoluit	l.2.c.3.a.3
Exempla ſecundarum radicum	l.2.c.3.a.3
Exempla Geometrica	l.2.c.2.a.5
Exempla contractè propoſita: & abſtractè ſoluta	l.2.c.3.a.6
Extractionis radicum formula	l.1.c.5.a.1

Extractionis radicis ex numeris integris l. 1. c. 5. a. 2
Extractio radicis ex numeris fractis l. 1. c. 5. a. 2
Extractio radicis ex numeris coſſicis l. 2. c. 2. a. 5
Extractio radicis ex Binomijs, & Reſiduis l. 3. c. 2. a. 7
Extractionis radicum examen l. 1 c. 5. a. 2
Extractionis radicum demonſtratio l. 1. c. 5. a. 2
Fractus numerus quis l. 1. c. 2
Fracti quomodo ad eandem Denominationē reducantur, l. 2. c. 3. art. 2
Fracti fractorum qui l. 1. c. 2. a. 5
Fractorum Additio, & Subtractio l. 1. c. 2. a. 3
Fractorum Multiplicatio, & Diuiſio l. 1. c. 2. a. 4
Fractus in fractū duct⁹ cur min⁹ vtroq; fracto producat l. 1. c. 4. a. 5. a. 2
Fractus in integrū ductus, cur minus integro producat l. 1. c. 4. a. 5. an. 2
Fractus per fractum, aut integrum ſi diuidatur cur plus proueniat, vt ſupra. ibid.
Gemmæ Friſii regula fallit l. 1. c. 3. a. 1 *Gemetrrica exempla* l. 2. c. 3. a. 5
Gradus quid, in App. 1. Gradus quomodo extendantur l. 1. c. 5
Heptagoni numeri vnde fiant l. 1. c. 4. a. 5
Hexagoni latus inuenire l. 3. c. 2. p. 2
Hexagoni numeri vnde creentur l. 1. c. 4. a. 5
Hieronis quaſtio Archimedi propoſita l. 1. c. 3. a. 3
Hora quot habeat minuta. In App. 1. Impar numerus quis l. 1. c. 4. a. 1
Irrationalium ſimplicium Additio, & Subtractio l. 3. c. 1. a. 1
Irrationaliū Cōpoſit. & Diminut. Additio, & Subtractio l. 3. c. 1. a. 3
Irrationalium coſſicorum Additio, & Subtractio l. 4. c. 1
Irrationalium ſimplicium Multiplicatio & Diuiſio l. 3. c. 1. a. 2
Irrationaliū cōpoſ. & dimin. Multiplicatio & Diuiſio l. 3. c. 1. a. 4
Irrationalium coſſicorum Multiplicatio, & Diuiſio l. 4. c. 1
Irrationales diuerſos habentes characteres quomodo ad eoſdem reducantur l. 3. c. 1. a. 1
Irrationales numeri an ſint veri numeri l. 3. antec. 1
Irrationalium vniuerſalium calculus l. 3. c. 1. a. 5
Latera hexagoni, tetragoni, trigoni, pentagoni, octogoni, & decagoni inuenire l. 3. c. 2. p. 2
Latus quid l. 2. l. 1. c. 4. a. 5 *Ligata radix quid* l. 3. circ. init.
Mediales qui numeri dicantur l. 3. init.
Medios proportionales inuenire l. 1. c. 1. a. 2
Menſura communis duorum numerorum pag. 22

Minu

Minutum quid. in App. 1.
Multiplicatio integrorum rationalium l. 1. c. 1. a. 4
Multiplicatio fractorum l. 1. c. 2. a. 4
Multiplicatio ſimplicium coſſicorum l. 2. c. 1. a. 2
Multiplicatio Compoſit. & Diminut. coſſic. l. 2. c. 1. a. 4
Multiplicatio irrationalium ſimplicium l. 3. c. 1. a. 2
Multiplicatio Compoſ. & Dimin. irrationalium l. 3. c. 1. a. 4
Multiplicatio vniuerſalium l. 3. c. 1. a. 5
Multiplicatio *irrationalium coſſicorum* l. 4. c. 1
Muſica progreſſio, & numeri l. 1. c. 4. a. 4
Multiplicatio aſtronomica. In App. 1.
Numeratio quid l. 1. c. 1. a. 1
Numerus rationalis abſolutus quid l. 1. c. 1
Numerus fractus quid l. 1. c. 2. *Numerus irrationalis quid* l. 3 *initio*.
Numerator quid l. 1. c. 2
Numerum datum proportionaliter ſecare l. 3. c. 2. *propoſ.* 1
Par numerus quis l. 1. c. 4. a. 1. *Planus numerus* l. 1. c. 4. a. 5
Parallelepipedum quid l. 1. c. 4. a. 5
Perfectus numerus quis & quomodo inueniatur. lib. 1. c. 4. a. 1
Primus numerus l. 1. c. 4. a. 1. *Primi numeri inter ſe qui* l. 1. c. 4. a. 1
Poſitionis ſimplicis regula l. 1. c. 3. a. 4 *Poſitionis duplicis reg.* l. 1. c. 3. a. 3
Praxis Italica cur omiſſa l. 1. c. 3. a. 3
Progreſſio Arithmetica quid l. 1. c. 4. a. 4
Progreſſionis Arithmeticæ regula l. 1. c. 4. a. 4
Progreſſionis Arithmeticæ proprietates l. 1. c. 4. a. 4
Progreſſio geometricæ quid l. 1. c. 4. a. 4
Progreſſionis geometricæ proprietates l. 1. c. 4. a. 4
Progreſſio Muſica l. 1. c. 4. a. 4 *Proportio quid & quotuplex* l. 1. c. 3. a. 2
Proportionum Compoſitio l. 1. c. 3. a. 3 *Proportionum Regula* l. 1. c. 3. a. 1
Proportionum Regula ſimplex directa l. 1. c. 3. a. 1
Proportionum Regula directa Reciproca l. 1. c. 3. a. 1
Proportionum Regula compoſita directa l. 1. c. 3. a. 1
Proportionum Regula compoſita reciproca l. 1. c. 3. a. 1
Proportionales medios quotcunque inter duos datos inuenire l. 3. c. 1. a. 2. an
Pyramis quid l. 1. c. 4. a. 5 *Quotus quid* l. 1. c. 1. a. 5
Quadratus numerus quid, & vnde naſcatur l. 1. c. 4. a. 5. l. 1. c. 5. init.
Quadrinomium quid l. 3. *initio*
Quadrati cubi vnde fiant l. 1. c. 5. init. *Radix quid* l. 1. c. 5.

INDEX RERVM PRAECIPVARVM.

Radicum & graduum tabula *l.1.c. 4.a.5*
Radices ſurdæ quomodo diuidantur *l.3.initio*
Radicum extractio *l.1.c.5.a.2.l.2,c.1.a.5.l.3.c.2.a 7*
Radices compoſitæ l.3. initio.Radices ligatæ *l.3.initio*
Radices vniuerſales *l.3.init.*
Radices ſecundæ l.2.c,1.a.6 Relatus numerus quis *l.1.c.3. a.2*
Regularium corporum latera inuenire *l.3.c.2 prop. 6.*
Scrupula quid in App.1.
Signum phyſicum quid in App.1.
Signum commune quid in App.1.
Solidus numerus quis *l.1.c.4. a. 5*
Subtractio integrorum *l.1.c.1.a.3*
Subtractio fractorum *l.1 c.2. a.3*
Subtractio proportionum l.1.c.3.a.3
Subtractio conſonantiarum *l.1.c. 4.a.4*
Subtractio coſſicorum ſimplicium *l.2.c.1. a.1*
Subtractio coſſicorum compoſit. & diminut. l.2.c.1.2.3
Subtractio ſecundarum Radicum. l.2.c.1.a.6
Subtractio irrationalium ſimplicium l.3.c.1.a.1
Subtractio irrationalium Compoſ.& Dimin. l.3.c. 1.a 3
Subtractio vniuerſalium radicum l.3.c. 1.a.5
Subtractio irrationalium coſſicorum l.4.c.1
Subtractio Aſtronomica.In Append.1.
Superſolidum quid *l.1 c.5.lib.* 2. initio
Tetragoni latus inuenire *l.3.c* 2.Propoſ. 2.
Trigoni latus inuenire *l.3.c.1.* propoſ. 2
Trianguli Iſoſcelis & æquilateri aream inuenire, *l.3.c.* 2. propoſ. 4
Triangularis numerus quis l.1.c.4.a.5
Trianguli ſcaleni aream inuenire *l.3.c.* 2 propoſ. 3
Trinomium quid l.3.initio
Vniuerſalis Radix quid l.3.c.1. a. 5
Zenſus quid l.2. initio
Zenſizenſus quid l.2. initio
Zenſicubus quid l.2. initio

FINIS